

Drzewa w klasycznym rachunku zdań

Marcin Czakon
marcinczakon@kul.pl

Spis treści

1	Drzewa w klasycznym rachunku zdań	3
	Reguła rozpoczynania drzewa - wynikanie logiczne .	5
	Reguły wzrostu drzewa	7
	Wynikanie Logiczne	12
	Brak wynikania logicznego	22
	Sprzeczność	25

To jest wersja robocza materiałów dydaktycznych. Proszę nie rozpowszechniać i nie kopiować. W przypadku znalezienia błędów proszę o kontakt: marcinczakon@kul.pl

Rozdział 1

Drzewa w klasycznym rachunku zdań

Jak powiedzieliśmy, klasyczny rachunek zdań to bardzo przydatne narzędzie do badania poprawności formalnej wnioskowań. Wnioskowanie jest formalnie poprawne, jeżeli wniosek wynika logicznie z przesłanek. Jednym ze sposobów oceny poprawności wnioskowań jest metoda drzew, czasami drzewa te nazywamy drzewami analitycznymi. Jest to rachunkowa (matematyczna) metoda przeszukiwania dostępnego zakresu interpretacji zbioru wyrażeń, z których składa się wnioskowanie.

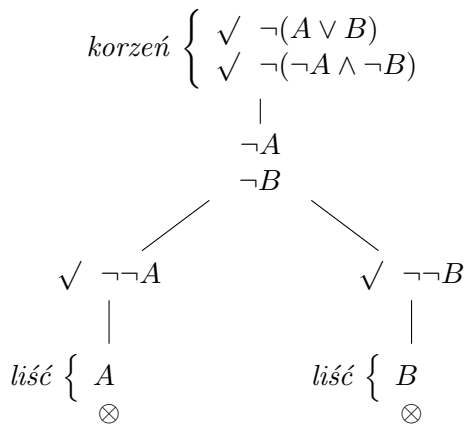
Z matematycznego punktu widzenia, drzewo analityczne to graf, czyli układ punktów połączonych w specjalny sposób odcinkami. Te punkty nazywamy węzłami, najczęściej są to rozgałęzienia. Umówmy się, że drzewo zaczyna się w *korzeniu*, a kończy na *liściach*. *Gałąź* rozpoczyna się w *korzeniu*, przebiega przez kolejne węzły i kończy na *liściu*. Liść to jest taki punkt, z którego nie wychodzi żaden odcinek. Zatem na jednej *gałęzi* znajduje się zawsze tylko jeden liść. Drzewo posiada tylko jeden *korzeń* oraz jedną lub więcej, ale skończenie wiele *gałęzi*. Gałęzi jest zawsze tyle samo, ile liście.

Drzewo jest tak zwanym grafem skierowanym, którego punkty są uporządkowane. Porządek zawsze ustalany jest od góry w dół. Punkt y leży niżej niż punkt x wtedy i tylko wtedy, gdy z punktu x można przejść do

punktu y poruszając się wyłącznie od korzenia w kierunku liścia. Korzeń zawsze jest najwyżej, rozpoczyna drzewo, a liść najniżej. Zatem obrazowo mówiąc, drzewa tutaj z góry na dół.

Gałęzie drzewa analitycznego składają się z wyrażeń klasycznego rachunku zdań. Zatem korzeń, węzły oraz liście są to po prostu wyrażenia, a całe drzewo to nic innego, jak wyrażenia połączone pewnymi odcinkami. Piękno i prostota metody drzew polega na tym, że dedukcyjność badanego wnioskowania można rozpoznać w sposób niemal natychmiastowy, odczytując ją z układu liści na drzewie. Metoda ta jest uniwersalnym narzędziem rachunkowym, ponieważ znajduje zastosowanie w wielu różnych teoriach, co zostanie pokazane w kolejnych rozdziałach.

Przykład 1



W Przykładzie 1 korzeń tworzą dwa wyrażenia: $\neg(A \vee B)$, $\neg(\neg A \wedge \neg B)$. Następnie drzewo rozwija się w dół do pierwszego węzła, w którym ponownie pojawiają się dwa wyrażenia: $\neg A$, $\neg B$. W tym miejscu następuje rozgałęzienie. Jedna gałąź przechodzi przez wyrażenie $\neg\neg A$ do liścia, w którym jest wyrażenie A . Druga gałąź przechodzi przez wyrażenie $\neg\neg B$ do liścia, w którym jest wyrażenie B . Drzewo to składa się z dwóch gałęzi, każda zaczyna się w korzeniu, jedna kończy się wyrażeniem A , natomiast druga kończy się wyrażeniem B .

O pewnych gałęziach drzewa możemy powiedzieć, że są zamknięte. Do zamknięcia gałęzi dochodzi w sytuacji, gdy na jednej gałęzi znajdzie się dowolny napis A oraz jego negacja $\neg A$. O takich wyrażeniach mówimy, że są wzajemnie sprzeczne.

Definicja 1 (Gałąź zamknięta) *Gałąź drzewa jest zamknięta wtedy i tylko wtedy, gdy na tej gałęzi znajduje się wyrażenie A oraz wyrażenie $\neg A$.*

W Przykładzie 1 dwie gałęzie są zamknięte. Na jednej mamy parę wyrażen A oraz $\neg A$, natomiast na drugiej jest para B oraz $\neg B$. W momencie pojawienia się sprzeczności na gałęzi drzewa należy taką gałąź natychmiast zamknąć i nie rozwijać jej. Zamknięcie to oznaczamy symbolem $\otimes$.

Definicja 2 (Drzewo zamknięte) *Drzewo jest zamknięte wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego gałęzie są zamknięte.*

Drzewo z Przykładu 1 jest zamknięte, ponieważ wszystkie jego gałęzie są zamknięte.

Reguła rozpoczynania drzewa - wynikanie logiczne

Skupimy się teraz na podaniu reguł, które rządzą budową drzew w celu badania dedukcyjności wnioskowań. Przypomnijmy, że wnioskowanie jest to zbiór przesłanek $A_1, A_2, \dots, A_n$, które mają za zadanie uzasadnić wniosek B . Wnioskowanie schematycznie można zapisać w następujący sposób:

A_1
 A_2
 $\dots$
 A_n

B

Wyrażenia nad poziomą linią to przesłanki, a pod tą linią znajduje się wniosek. W celu zbadania, czy wniosek wynika logicznie z przesłanek we wnioskowaniu, należy drzewo rozpocząć w ten sposób, że w korzeniu drzewa przepisujemy wszystkie przesłanki (jedna pod drugą) oraz wniosek,

który poprzedzamy znakiem $\neg$. Pozioma linia oddzielająca przesłanki od wniosku znika.

Reguła 1 (Wynikanie logiczne na drzewie)

Zdanie B wynika logicznie ze zdań $A_1, A_2, \dots, A_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy drzewo rozpoczynające się od wyrażeń $A_1, A_2, \dots, A_n$ oraz wyrażenia $\neg B$ zamyka się.

Znając Regułę 1 możemy z drzewa zaprezentowanego w Przykładzie 1 wywnioskować, że jest to drzewo, którego zadaniem było zbadanie, czy z przesłanki $\neg(A \vee B)$ wynika logicznie wniosek $\neg A \wedge \neg B$. Zgodnie z Definicją 2 drzewo jest zamknięte, ponieważ wszystkie gałęzie są zamknięte, zatem wniosek wynika logicznie z przesłanki.

Ten pierwszy krok w budowie drzewa można rozumieć w następujący sposób. Zakładamy, że przesłanki badanego wnioskowania są zdaniami prawdziwymi, dlatego przepisujemy je w korzeniu bez zmian, następnie przyjmujemy, że wniosek jest zdaniem fałszywym, dlatego poprzedzamy go znakiem negacji ($\neg$). Zatem Regułę 1 rozumiemy tak: sprawdzimy, czy możliwe jest, że przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy. Reguła ta mówi, że zachodzi wynikanie logiczne, jeżeli drzewo się zamyka, a zgodnie z Definicją 2 (s. 5) będzie ono zamknięte, jeżeli na każdej gałęzi znajdziemy sprzeczność. Zatem, jeżeli założenie o prawdziwości przesłanek oraz fałszywości wniosku prowadzi do sprzeczności w każdej sytuacji, to wniosek wynika logicznie z przesłanek. O wynikaniu logicznym możemy również powiedzieć, używając pojęcia interpretacji zdefiniowanego na stronie ??.

Definicja 3 (Wynikanie) *Zdanie B wynika logicznie ze zdań $A_1, A_2, \dots, A_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje taka interpretacja, że wszystkie przesłanki $A_1, A_2, \dots, A_n$ są prawdziwe, a wniosek B jest fałszywy.*

Stosując tę Definicję do wnioskowania rozważanego w Przykładzie 1 możemy powiedzieć, że nie istnieje taka interpretacja liter zdaniowych A oraz B , że przesłanka $\neg(A \vee B)$ jest zdaniem prawdziwym, a wniosek $\neg A \wedge \neg B$ jest zdaniem fałszywym.

Reguły wzrostu drzewa

Analizując wyrażenia klasycznego rachunku zdań za pomocą metody drzew wykorzystujemy 9 reguł wzrostu drzewa. Reguły te są ściśle powiązane z definicjami interpretacji wartości logicznej wyrażeń złożonych, które zostały omówione na stronach ??-??. Reguły te są tak pomyślane, że zawsze prowadzą od wyrażeń złożonych do wyrażeń prostszych. W ten sposób wzrost drzewa polega na rozwijaniu gałęzi od korzenia, gdzie mamy wyrażenia złożone, do liścia, gdzie najczęściej pojawia się pojedyncza litera zdaniowa lub litera z negacją.

Dla spójnika negacji ($\neg$) mamy jedną regułę, która nie wymaga rozgałęzienia drzewa.

Reguła 2 (Podwójna negacja)

$$\begin{array}{c} \sqrt{\neg\neg A} \\ | \\ A \end{array}$$

Reguła ta pozwala rozwinąć gałąź w dół i napisać na niej wyrażenie A , jeżeli wcześniej na tej gałęzi znajdowało się wyrażenie $\neg\neg A$.

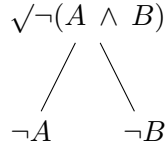
Dla wyrażeń zbudowanych za pomocą spójnika koniunkcji ($\wedge$) mamy dwie reguły.

Reguła 3 (Koniunkcja)

$$\begin{array}{c} \sqrt{A \wedge B} \\ | \\ A \\ B \end{array}$$

Reguła ta pozwala rozwinąć gałąź w dół i napisać na dwa kolejne wyrażenia A oraz B , jeżeli wcześniej na tej gałęzi znajdowało się wyrażenie złożone $A \wedge B$.

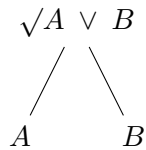
Reguła 4 (Negacja koniunkcji)



Reguła ta nakazuje, jeżeli wcześniej na drzewie znajdowało się wyrażenie złożone $\neg(A \wedge B)$, rozgałęzić drzewo i na jednej z nowo powstałych gałęzi napisać $\neg A$, a na drugiej $\neg B$.

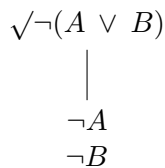
Dla wyrażeń zbudowanych za pomocą spójnika alternatywy ($\vee$) również mamy dwie reguły.

Reguła 5 (Alternatywa)



Reguła ta nakazuje, jeżeli wcześniej na drzewie znajdowało się wyrażenie złożone $A \vee B$, rozgałęzić drzewo i na jednej z nowo powstałych gałęzi napisać A , a na drugiej B .

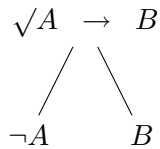
Reguła 6 (Negacja alternatywy)



Reguła ta pozwala rozwinąć gałąź w dół i napisać dwa kolejne wyrażenia $\neg A$ oraz $\neg B$, jeżeli wcześniej na tej gałęzi znajdowało się wyrażenie złożone $\neg(A \vee B)$.

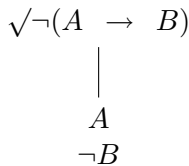
Dla wyrażeń zbudowanych za pomocą spójnika implikacji ($\rightarrow$) również mamy dwie reguły.

Reguła 7 (Implikacja)



Reguła ta nakazuje, jeżeli wcześniej na drzewie znajdowało się wyrażenie złożone $A \rightarrow B$, rozgałęzić drzewo i na jednej z nowo powstałych gałęzi napisać $\neg A$, a na drugiej B .

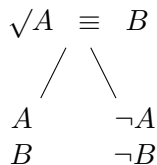
Reguła 8 (Negacja implikacji)



Reguła ta pozwala rozwinąć gałąź w dół i napisać dwa kolejne wyrażenia A oraz $\neg B$, jeżeli wcześniej na tej gałęzi znajdowało się wyrażenie złożone $\neg(A \rightarrow B)$.

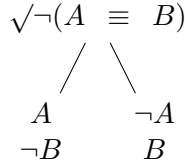
Dla wyrażeń zbudowanych za pomocą spójnika równoważności ($\equiv$) również mamy dwie reguły.

Reguła 9 (Równoważność)



Reguła ta nakazuje, jeżeli wcześniej na drzewie znajdowało się wyrażenie złożone $A \equiv B$, rozgałęzić drzewo i na jednej z nowo powstałych gałęzi napisać kolejno dwa wyrażenia A oraz B , a na drugiej również dwa wyrażenia $\neg A$ oraz $\neg B$.

Reguła 10 (Negacja równoważności)



Reguła ta nakazuje, jeżeli wcześniej na drzewie znajdowało się wyrażenie złożone $\neg(A \equiv B)$, rozgałęzić drzewo i na jednej z nowo powstałych gałęzi napisać kolejno dwa wyrażenia $\neg A$ oraz B , a na drugiej również dwa wyrażenia A oraz $\neg B$.

Rozwijając drzewo za pomocą powyższych reguł należy pamiętać o kilku zasadach.

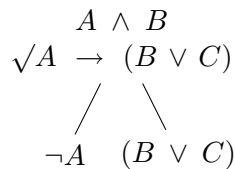
1. Zastosowanie reguły do wyrażenia znajdującego się na drzewie zaznaczamy symbolem $\sqrt{}$.

Symbol ten oznacza, że została wykorzystana cała informacja, która była zawarta w danym wyrażeniu, i zabronione jest dalsze stosowanie jakichkolwiek reguł do takiego wyrażenia.

2. Wynik zastosowania reguły do danego wyrażenia należy zapisać na końcu każdej nie zamkniętej gałęzi, na której znajduje się to wyrażenie.

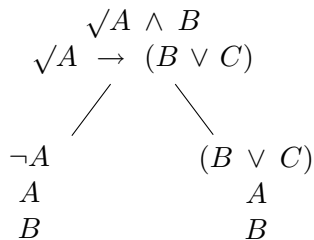
Zasadę tę będzie najprościej zrozumieć, omawiając jej zastosowania za pomocą przykładu.

Przykład 2 Załóżmy, że mamy fragment drzewa jak poniżej. Do wyrażenia $A \wedge B$ chcemy zastosować Regułę 3, która nie wymaga rozgałęzienia.

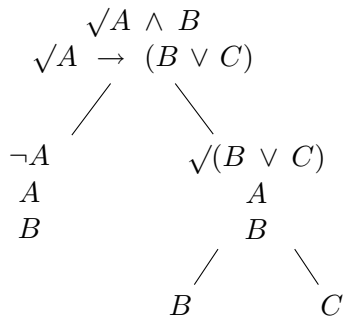


Ponieważ wyrażenie $A \wedge B$ występuje na części wspólnej dla dwóch gałęzi, to efekt zastosowania reguły należy zapisać na końcu każdej z tych gałęzi

osobno. Zastosowanie reguły zaznaczamy, wstawiając symbol $\checkmark$. W efekcie otrzymujemy następujące drzewo:



Zastosujmy teraz Regułę 5 do wyrażenia $B \vee C$. Reguła ta wymaga rozgałęzienia drzewa. Zastosowanie reguły zaznaczamy, wstawiając symbol $\checkmark$. W efekcie otrzymujemy następujące drzewo:



Zasady 1. oraz 2. są obowiązkowe i należy ich przestrzegać bezwzględnie. Nie zastosowania się, do którejś z nich, może skutkować błędnymi wynikami. Następne dwie zasady nie są obowiązkowe, ale pozwalają skrócić drzewo, czyli osiągnąć wynik w prostszy sposób.

3. W pierwszej kolejności stosuj te reguły, które nie wymagają rozgałęziania.
4. Zamykaj gałęzie najszybciej jako to jest możliwe.

Wynikanie Logiczne

Przedstawiono wszystkie reguły rozwija drzewa, które przydatne są do oceny dedukcyjnej poprawności wnioskowań zapisanych w języku KRZ. Rozważmy poniższe przykłady, które obrazują jak należy wykorzystać tę metodę przy ocenie wnioskowań.

Przykład 3

Sprawdź, za pomocą metody drzew, czy wniosek wynika logicznie z przesłanek, w poniższym wnioskowaniu:

$A \rightarrow B$

A

B

Rozwiązanie:

Krok 1: Na podstawie Reguły 1 rozpoczynamy drzewo wypisując przesłanki oraz wniosek poprzedzony znakiem negacji $\neg$.

$A \rightarrow B$

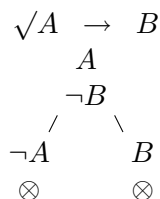
A

$\neg B$

Krok 2: Zauważamy, że możemy zastosować Regułę 7 do pierwszej przesłanki i rozgałęzić drzewo. Na lewej gałęzi wpisujemy negację poprzednika a na prawej następnik. Zastosowanie reguły do wyrażenia zaznaczamy symbolem $\sqrt{}$.

$$\begin{array}{c}
 \sqrt{A} \rightarrow B \\
 A \\
 \neg B \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \neg A \quad B
 \end{array}$$

Krok 3: Zauważmy, że teraz mamy drzewo z dwiema gałęziami. Zauważmy również, że na każdej z tych gałęzi występuje sprzeczność. Na lewej gałęzi mamy parę zdań A oraz $\neg A$, a na prawej gałęzi parę zdań B oraz $\neg B$. Zamykamy obydwie gałęzie, oznaczając to symbolem $\otimes$.



Krok 4: Rozpoczęliśmy drzewo wypisując przesłanki oraz negację wniosku. Wszystkie gałęzie drzewa zostały zamknięte, zatem drzewo też jest zamknięte, więc na podstawie Reguły 1 udzielamy odpowiedzi, że wniosek B wynika logicznie z przesłanek $A \rightarrow B, A$. ■

Reguła 1 pozwoliła nam przekonać się, że zachodzi wynikanie logiczne w badanym wnioskowaniu. Przypomnijmy sobie Definicję ???. Skoro wiemy, że zachodzi wynikanie logiczne, to na mocy tej definicji możemy stwierdzić, że w badanym wnioskowaniu nie może być tak, że przesłanki $A \rightarrow B, A$ będą prawdziwe, a wniosek B będzie fałszywy. Łatwo się przekonać, że nie da się dobrać wartości logicznej prawdy i fałszu dla liter zdaniowych A, B tak, żeby osiągnąć taki wynik.

Przykład 4

Sprawdź za pomocą metody drzew, czy wniosek wynika logicznie z przesłanek, w poniższym wnioskowaniu:

$$((A \vee \neg B) \equiv \neg C) \rightarrow \neg(B \wedge C)$$

$$\neg C \rightarrow (\neg B \vee A)$$

$$(\neg B \vee A) \rightarrow \neg C$$

$$\neg(C \wedge B)$$

Rozwiązanie:

Krok 1: Na podstawie Reguły 1 rozpoczynamy drzewo wypisując przesłanki oraz wniosek poprzedzony znakiem negacji $\neg$.

$$\begin{aligned} &((A \vee \neg B) \equiv \neg C) \rightarrow \neg(B \wedge C) \\ &\quad \neg C \rightarrow (\neg B \vee A) \\ &\quad (\neg B \vee A) \rightarrow \neg C \\ &\quad \quad \neg\neg(C \wedge B) \end{aligned}$$

Krok 2: Pamiętając o zasadzie 3., która nakazuje stosować najpierw reguły nie wymagające rozgałęzienia, do czwartej przesłanki stosujemy Regułę 2. Oczywiście oznaczamy wykorzystanie tego wyrażenia symbolem $\sqrt{}$.

$$\begin{array}{c}
 ((A \vee \neg B) \equiv \neg C) \rightarrow \neg(B \wedge C) \\
 \neg C \rightarrow (\neg B \vee A) \\
 (\neg B \vee A) \rightarrow \neg C \\
 \sqrt{\neg\neg(C \wedge B)} \\
 | \\
 C \wedge B
 \end{array}$$

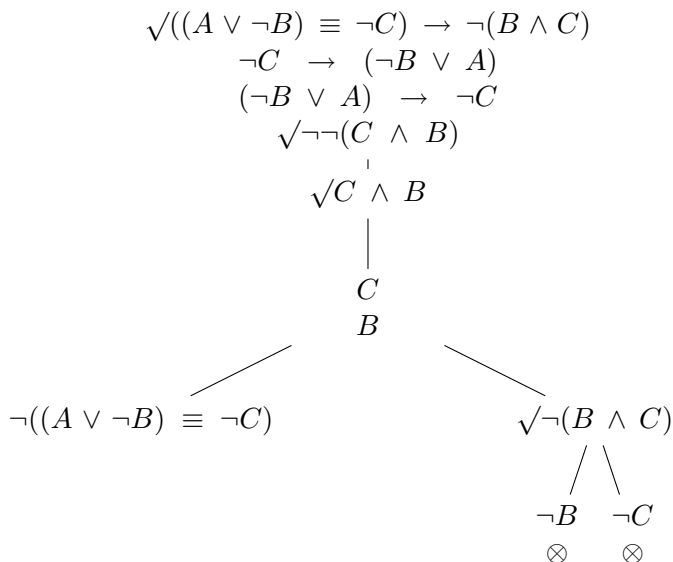
Krok 3: Zauważamy, że nowo dopisane do drzewa wyrażenie, również jest wyrażeniem złożonym, a więc można do niego zastosować Regułę 3, która nie wymaga rozgałęzienia. Oczywiście kolejny raz zaznaczamy to za pomocą znaku $\sqrt{}$.

$$\begin{array}{c}
 ((A \vee \neg B) \equiv \neg C) \rightarrow \neg(B \wedge C) \\
 \neg C \rightarrow (\neg B \vee A) \\
 (\neg B \vee A) \rightarrow \neg C \\
 \sqrt{\neg\neg(C \wedge B)} \\
 | \\
 \sqrt{C} \wedge B \\
 | \\
 C \\
 B
 \end{array}$$

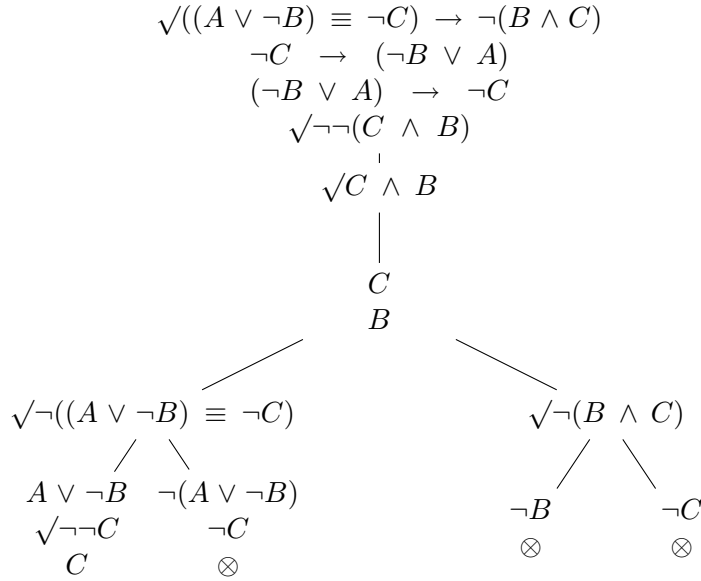
Krok 4: Jak na razie nie zauważyliśmy sprzeczności na drzewie, ale mamy jeszcze kilka złożonych wyrażeń, do których możemy zastosować reguły wzrostu drzewa. Wybierzmy przesłankę pierwszą i zastosujmy do niej Regułę 7. Nie należy zapominać o wprowadzeniu symboli $\sqrt{}$.

$$\begin{array}{c}
 \sqrt{((A \vee \neg B) \equiv \neg C) \rightarrow \neg(B \wedge C)} \\
 \neg C \rightarrow (\neg B \vee A) \\
 (\neg B \vee A) \rightarrow \neg C \\
 \sqrt{\neg\neg(C \wedge B)} \\
 \quad | \\
 \sqrt{C} \wedge B \\
 \quad | \\
 C \\
 B \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \neg((A \vee \neg B) \equiv \neg C) \quad \neg(B \wedge C)
 \end{array}$$

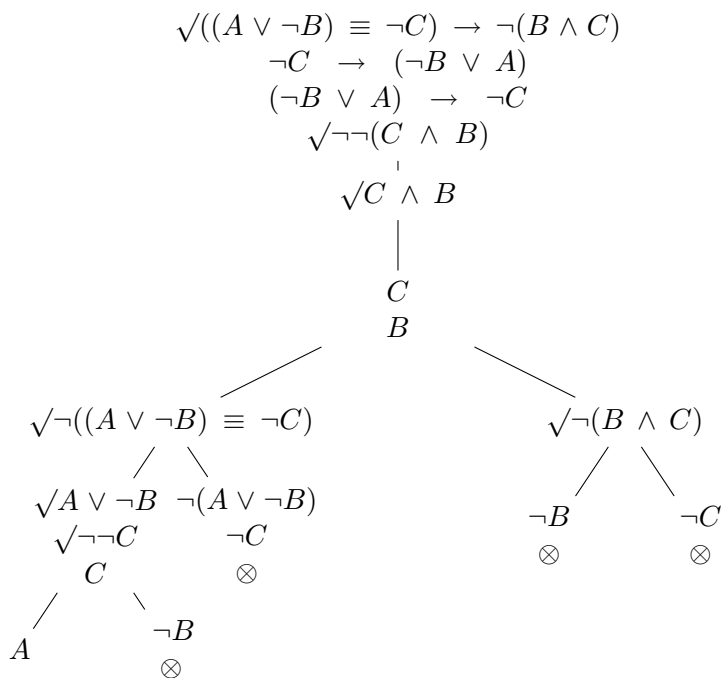
Krok 5: Zwróćmy uwagę na prawą gałąź. Do ostatniego wyrażenia na tej gałęzi możemy zastosować Regułę 4, która wymaga rozgałęzienia. Licząc od lewej mamy trzy gałęzie. Na drugiej gałęzi znajduje się para wyrażen sprzecznych: B oraz $\neg B$, więc gałąź ta zostaje zamknięta. Na trzeciej gałęzi również znajduje się para wyrażen sprzecznych: A oraz $\neg A$, ta gałąź również zostaje zamknięta. Zamknięte gałęzie oznaczamy symbolem $\otimes$.



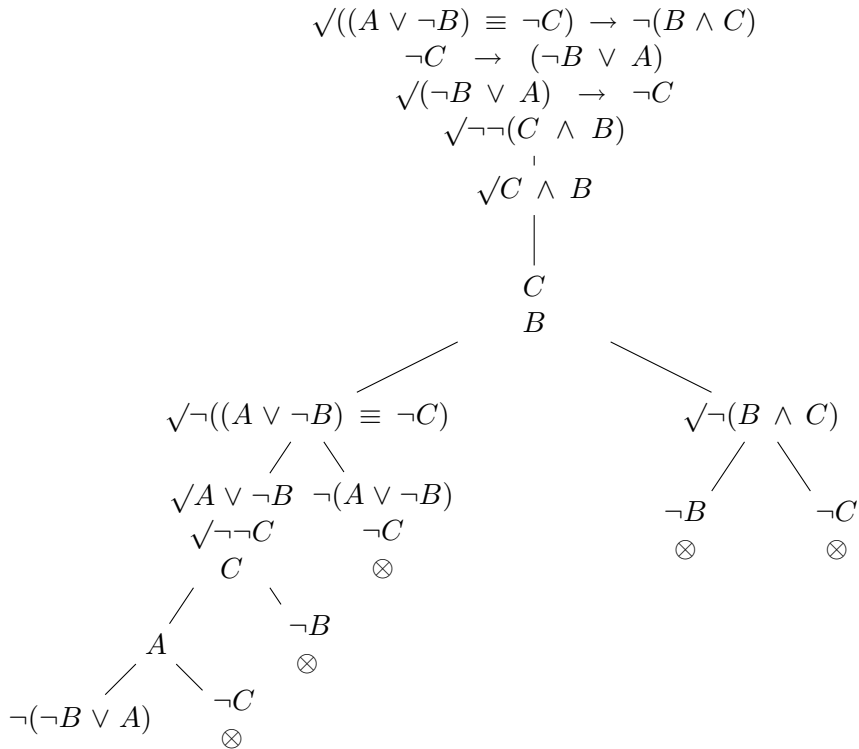
Krok 6: Na końcu pozostałej otwartej gałęzi znajduje się wyrażenie będące negacją równoważności. Stosujemy do niego Regułę 10, która wymaga rozgałęzienia. Powstają dwie nowe gałęzie. Na jednej z nich natychmiast zauważamy parę wyrażeń sprzecznych: C oraz $\neg C$. Zamykamy tę gałąź. Na drugiej zauważmy, że do wyrażenia $\neg\neg C$ możemy zastosować Regułę 2, która nie wymaga rozgałęzienia.



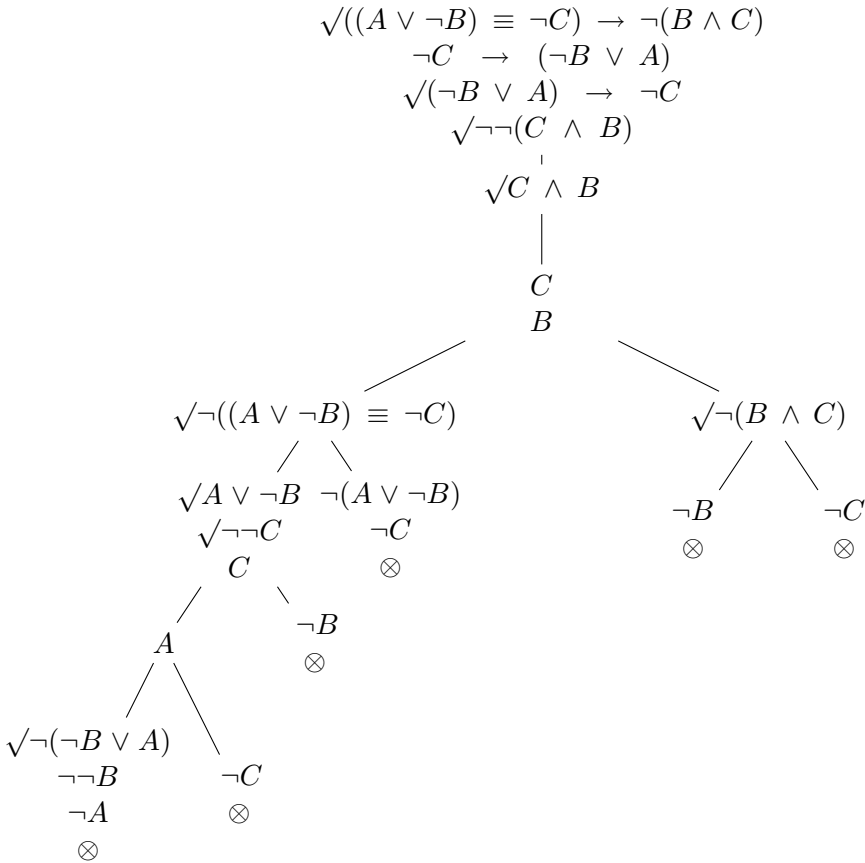
Krok 7: Do jedynej pozostałej niezamkniętej gałęzi stosujemy Regułę 5, która wymaga kolejnego rozgałęzienia. Natychmiast na jednej z nowo powstałych gałęzi zauważamy parę wyrażeń sprzecznych: B oraz $\neg B$. Zamykamy więc tę gałąź.



Krok 8: W korzeniu pozostały nam jeszcze dwa wyrażenia złożone, do których możemy zastosować Regułę 7. Stosujemy ją do wyrażenia $(\neg B \vee A) \rightarrow \neg C$. Ponownie mamy tylko jedną niezamkniętą gałąź, więc efekt zastosowania tej reguły wpisujemy na końcu tej gałęzi. Na jednej z nowo powstałych gałęzi zauważmy parę zdań sprzecznych: C oraz $\neg C$, więc zamykamy tę gałąź.



Krok 9: Ponownie zostaje jedna otwarta gałąź. Liść tej gałęzi jest wyrażeniem złożonym $\neg(\neg q \vee p)$, więc możemy do niego zastosować Regułę 6, która nie wymaga rozgałęzienia. Na gałęzi dopisujemy dwa nowe wyrażenia. Natychmiast zauważamy, że pojawia się para wyrażień sprzecznych: A oraz $\neg A$. Gałąź zostaje zamknięta.



Krok 12: Skoro wszystkie gałęzie drzewa zostały zamknięte, to całe drzewo jest zamknięte. Zgodnie z Regułą 1 w badanym schemacie wniosek wynika logicznie z przesłanek. ■

Zadania kontrolne

Zadanie 1 *Sprawdź, czy wniosek wynika logicznie z przesłanek. Formalizacja + sprawdzenie.*

Zadanie 2 *Sprawdź, czy wniosek wynika logicznie z przesłanek. tylko schemat*

Brak wynikania logicznego

Nie każde wnioskowanie zapisane za pomocą języka KRZ jest dedukcyjne. Reguła 1 mówi o tym, że mamy do czynienia z wynikaniem, jeżeli właściwie rozpoczęte drzewo zostanie zamknięte. Nie każde drzewo się zamyka. Może zdarzyć się tak, że zastosujemy reguły do każdego wyrażenia, do którego można je zastosować - rozwiniemy drzewo w całości - ale nie wszystkie gałęzie na drzewie będą zamknięte.

Definicja 4 (gałąź zakończona) *Gałąź drzewa jest zakończona wtedy i tylko wtedy, gdy bądź jest zamknięta, bądź nie znajdują się na niej żadne wyrażenia, do których można zastosować jedną z reguł od 2 do 10.*

Jeżeli gałąź jest zakończona, ale nie jest zamknięta, to mówimy, że jest otwarta. Taką gałąź oznaczamy symbolem $\odot$. Jeżeli drzewo rozpoczęliśmy zgodnie z zaleceniami Reguły 1, czyli wypisując przesłanki oraz negację wniosku i drzewo to zawiera przynajmniej jedną zakończoną, ale nie zamkniętą gałąź, to w badane wnioskowanie nie jest dedukcyjne. Krócej, przynajmniej jedna otwarta gałąź informuje nas, że wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Metoda badania wnioskowań za pomocą drzew na gruncie KRZ ma tę specyficzną własność, że pozwala o dowolnym wnioskowaniu rozstrzygnąć, czy jest ono dedukcyjne, czy nie jest.

Wróćmy teraz do Definicji 5, która mówi, że jeżeli zachodzi wynikanie, to nie istnieje interpretacja, w której przesłanki są prawdziwe a wniosek jest fałszywy. Jeżeli wynikanie nie zachodzi, to taka interpretacja istnieje. Pamiętajmy, że Reguła 1 nakazuje rozpoczynać drzewo od negacji wniosku. Zatem drzewo zamknięte oznacza, że nie istnieje interpretacja, w której

prawdziwe są wszystkie wyrażenia stanowiące korzeń tego drzewa. Jeżeli drzewo jest zakończone, ale nie zamknięte, wtedy możemy znaleźć taką interpretację, w której wszystkie wyrażenia tworzące korzeń tego drzewa będą prawdziwe. Interpretację taką odczytujemy w ten sposób, że na gałęzi, która została zakończona, ale nie zamknięta, odnajdujemy wszystkie pojedyncze litery zdaniowe oraz negacje pojedynczych liter zdaniowych. Pojedyncze litery zdaniowe w odczytywanej interpretacji są prawdziwe, a negacje pojedynczych liter zdaniowych są fałszywe. Wartość logiczna innych liter zdaniowych występujących w badanym drzewie nie ma znaczenia.

Odczytanie interpretacji z zakończonej a nie zamkniętej gałęzi jest równoznaczne z odnalezieniem *kontraprzykładu* dla badanego zbioru wyrażeń. Jeżeli badamy schemat wnioskowania logicznego, to odnaleziony *kontraprzykład* wskaże interpretację, w której wszystkie przesłanki będą prawdziwe, a wniosek będzie fałszywy.

Kontraprzykład z otwartej gałęzi odczytujemy w następujący sposób:

1. Wybierz gałąź, która jest zakończona, ale nie zamknięta.
2. Na wybranej gałęzi odnajdź wszystkie pojedyncze schematyczne litery zdaniowe i zinterpretuj je jako zdania prawdziwe (T).
3. Na wybranej gałęzi odnajdź wszystkie pojedyncze schematyczne litery zdaniowe poprzedzone symbolem negacji ($\neg$) i zinterpretuj je jako zdania fałszywe (F).
4. Jeżeli wyrażenia stanowiące korzeń drzewa zawierają litery lub negacje liter, które nie znajdują się na wybranej gałęzi, to ich wartość logiczna nie ma znaczenia, mogą być prawdziwe lub fałszywe.
5. Takie przypisanie wartości logicznych literom zdaniowym stanowi kontraprzykład.

Przykład 5

Sprawdź, za pomocą metody drzew, czy wniosek wynika logicznie z przesłanek, w poniższym wnioskowaniu:

$$\begin{array}{l}
 A \rightarrow B \\
 B \\
 \hline
 A
 \end{array}$$

Rozwiązanie: Krok 1: Na podstawie Reguły 1 rozpoczynamy drzewo analityczne wypisując przesłanki i negację wniosku.

$$\begin{array}{c}
 A \rightarrow B \\
 B \\
 \neg A
 \end{array}$$

Krok 2: Stosujemy Regułę 7 do pierwszej przesłani. W efekcie otrzymujemy rozgałęzienie drzewa. Zastosowanie reguły oznaczamy symbolem $\sqrt{}$.

$$\begin{array}{c}
 \sqrt{} \quad A \rightarrow B \\
 \quad B \\
 \quad \neg A \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \neg A \quad B
 \end{array}$$

Krok 4: Zauważmy, że na drzewie nie ma już żadnego wyrażenia, do którego możemy zastosować regułę. Każda z powstałych w ten sposób gałęzi zostaje zakończona, ale nie jest zamknięta. Wykorzystaliśmy wszystkie wyrażenia złożone, które się na nich znajdowały i nie udało się znaleźć sprzeczności. Gałęzie zakończone a nie zamknięte oznaczamy symbolem $\odot$.

$$\begin{array}{c}
 \sqrt{} \quad A \rightarrow B \\
 \quad B \\
 \quad \neg A \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \neg A \quad B \\
 \odot \quad \odot
 \end{array}$$

Krok 6: Nie udało się zamknąć badanego drzewa, co oznacza, że w powyższym schemacie wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Można się

o tym przekonać, odczytując z drzewa interpretację, która będzie kontrprzykładem, w którym wszystkie przesłanki tego wnioskowania będą prawdziwe, a wniosek fałszywy.

Wybieramy na przykład lewą gałąź. Występuje na niej litera B , więc przypisujemy jej wartość T . Na tej gałęzi występuje również litera A poprzedzona symbolem $\neg$, więc przypisujemy jej wartość F .

Wskazane wartości poszczególnych liter stanowią kontrprzykład dla zadanego schematu wnioskowania.

Przesłanka pierwsza jest prawdziwa:
$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ F & T & T \end{array}$$

Przesłanka druga jest prawdziwa:
$$\begin{array}{c} B \\ T \end{array}$$

Wniosek jest fałszywy:
$$\begin{array}{c} A \\ F \end{array}$$

Na mocy Definicji 5 kontrprzykład wskazuje, że w badanym schemacie wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. ■

Zadania kontrolne

Zadanie 3 Wykaż, że wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Odczytaj kontrprzykład z drzewa.

Sprzeczność

Narzędzia logiki formalnej okazują się również bardzo przydatne w wykrywaniu sprzeczności w zdanym zbiorze zdań. Tego rodzaju umiejętność może mieć szczególne zastosowania na gruncie nauk prawnych i stosowania prawa. Badanym zbiorem zdań mogą być zebrane materiały dowodowe, zeznania świadka czy zbiór przepisów prawa. Wyeliminowanie sprzeczności z tego rodzaju zbiorów zdań jest szczególnie ważne.

Powiedzieliśmy powyżej (błąd materialny we wnioskowaniu), że sprzeczna jest para zdań, w której jedno z tych zdań stwierdza coś, a drugie dokładnie temu samemu przeczy. Za pomocą języka KRZ sprzeczność wyrażona będzie jako para zdań A oraz $\neg A$. Skoro każde zdanie jest bądź prawdziwe,

bądź fałszywe, to mamy pewność, że z dwóch zdań sprzecznych jedno na pewno jest fałszywe. Zatem wykrycie sprzeczności informuje nas, że w zebranych materiałach dowodowych, zeznaniach świadka, czy zbiorze przepisów prawa mamy do czynienia z fałszem. Wskazanie zdania fałszywego bardzo często nie należy do zadań najłatwiejszych. Ponadto jest to zadanie ekspertów w danej dziedzinie. Logika jedynie informuje, że mamy do czynienia ze sprzecznością, która powstaje w oparciu o fałszywe zdanie.

Do wykrycia sprzeczności w zbiorze zdań bardzo pomocna okazuje się metoda drzew. Badanie to jest podobne do badania wnioskowań pod kątem ich dedukcyjności. Należy zmodyfikować jedynie Regułę 1, za pomocą której rozpoczynaliśmy drzewo. Przyjmijmy, że mamy zbiór zdań $A_1, A_2, \dots, A_n$, którego sprzeczność chcemy zbadać.

Reguła 11 (Sprzeczność zbioru zdań)

Zbiór zdań $A_1, A_2, \dots, A_n$ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy drzewo rozpoczynające się od wyrażeń $A_1, A_2, \dots, A_n$ zamyka się.

Zatem wystarczy rozpocząć drzewo wypisując wszystkie zdania z badanego zbioru. Następnie, korzystając z reguł wzrostu drzewa, rozwijamy gałęzie, próbując je zamknąć. Jeżeli wszystkie gałęzie na drzewie są zamknięte, to badany zbiór wyrażeń jest sprzeczny. Jeżeli przynajmniej jedna z gałęzi pozostanie otwarta, to w badanym zbiorze wyrażeń nie ma sprzeczności.

Przykład 6

Sprawdź, za pomocą metody drzew, czy zbiór wyrażeń $\{A \rightarrow B, A, \neg B\}$ jest sprzeczny.

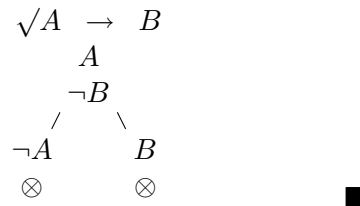
Rozwiązanie:

Krok 1: Na podstawie Reguły 11 rozpoczynamy drzewo wypisując w korzeniu wszystkie wyrażenia należące do badanego zbioru.

$$A \rightarrow B$$

$$\begin{array}{c} A \\ \neg B \end{array}$$

Krok 2: Zauważamy, że możemy zastosować Regułę 7 do pierwszego wyrażenia i rozgałęzić drzewo. Zastosowanie reguły oznaczamy symbolem $\surd$. Natychmiast zauważamy, że na lewej gałęzi występuje para wyrażen sprzecznych A oraz $\neg A$. Zamykamy tę gałąź, oznaczając to symbolem $\otimes$. Prawa gałąź również zawiera wyrażenia sprzeczne B oraz $\neg B$. Zamykamy ją. Skoro wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte, to drzewo jest zamknięte. Zgodnie z Regułą 1 badany zbiór wyrażen jest sprzeczny.



Zwróćmy uwagę na jeszcze jedną kwestię. Reguła 1 w celu zbadania poprawności wnioskowania nakazuje rozpocząć drzewo od wypisania przesłanek oraz negacji wniosku. Natomiast zgodnie z Regułą 11 w celu zbadania zbioru zdań pod kątem jego ewentualnej sprzeczności należy rozpocząć drzewo od wypisania elementów tego zbioru. W każdym z tych przypadków zamknięte drzewo oznacza pewnego rodzaju sukces, czyli dedukcyjność wnioskowania lub sprzeczność badanego zbioru zdań. Rozpoczęcie drzewa od wypisania przesłanek oraz negacji wniosku może być rozumiane jako próba zbadania, czy zbiór złożony z przesłanek oraz negacji wniosku jest zbiorem sprzecznym. Wykrycie sprzeczności w tym zbiorze jest równoważne ze stwierdzeniem, że zachodzi wynikanie logiczne pomiędzy przesłankami a wnioskiem. Zależność ta jest związana z naturą związku wynikania logicznego. We wnioskowaniu dedukcyjnym wniosek jest jakby zawarty już w przesłankach - jest w nich ukryty - dlatego dołączenie do przesłanek negacji wniosku wywołuje sprzeczność.

Sprzeczność zbioru zdań można również rozważyć z perspektywy interpretacji wyrażen zbudowanych za pomocą języka KRZ (Definicja ??).

Pamiętamy, że interpretacja polega na przypisaniu jednej z dwóch wartości logicznych każdej literze zdaniowej.

Definicja 5 (Sprzeczność) *Zbiór zdań $A_1, A_2, \dots, A_n$ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje taka interpretacja, że wszystkie wyrażenia tego zbioru są prawdziwe.*

Zatem zbiór zdań sprzecznych, to taki zbiór, którego wszystkie elementy nie mogą być jednocześnie zdaniami prawdziwymi. Tutaj jeszcze raz widać, jak ważne może okazać się wykrycie sprzeczności wśród pewnych zdań. Sprzeczność jest niepodważalnym dowodem na to, że przynajmniej jedno zdanie w takim zbiorze jest fałszywe.

Zadanie 4 *Zbadaj poniższe zeznania i powiedź, czy jest wśród nich zdanie fałszywe.*

Zadanie 5 *Wykaż, że poniższe zbiory zdań są sprzeczne.*