

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a

1. Wyznacz wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla danych

x	-1	0	1
$f(x)$	1	0	1

korzystając ze wzoru interpolacyjnego Lagrange'a. Wyznacz przybliżoną wartość $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Korzystając ze wzoru interpolacyjnego Lagrange'a wyznaczyć wielomian interpolacyjny dla danych

x	0	1	3
$f(x)$	-1	2	4

Obliczyć przybliżoną wartość funkcji f dla $x = 2$.

3. Pokazać, że jeżeli
- $q(x)$
- interpoluje funkcję
- f
- w punktach
- $x_1, x_2, \dots, x_n$
- oraz
- $p(x)$
- interpoluje funkcję
- f
- w punktach
- $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$
- , to funkcja
- $q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0}(q(x) - p(x))$
- interpoluje
- f
- w punktach
- $x_0, x_1, \dots, x_n$

4. Wartość funkcji
- $f(x) = \sin x$
- w punkcie
- $\frac{3\pi}{4}$
- przybliżono wartościami wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a o węzłach
- $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$
- . Wyznaczyć przybliżoną wartość
- $\sin \frac{3\pi}{4}$
- stosując interpolację wielomianową.

5. Liczbę
- $\sqrt{3}$
- można obliczyć interpolując funkcję
- $f(x) = \sqrt{x}$
- w węzłach
- $x_0 = 1, x_1 = \frac{9}{4}, x_2 = 4$
- . Wyznaczyć przybliżoną wartość tego pierwiastka.

6. Obliczyć przybliżoną wartość
- $\sqrt{2}$
- interpolując funkcję
- $f(x) = \sqrt{4x - 3}$
- na węzłach
- $x_0 = 1, x_1 = \frac{7}{4}, x_2 = 3$
- . Podaj oszacowanie błędu.

7. Udowodnić, że

$$\text{i) } \sum_{i=0}^n l_i(x) \equiv 1 \quad \text{ii) } \sum_{i=0}^n x_i^k l_i(0) = 0, \quad 1 \leq k \leq n$$

9. Dla danej funkcji
- f
- oraz parami różnych punktów
- $x_0, x_1, \dots, x_n$
- wielomian
- $L_0(x)$
- interpoluje funkcję
- f
- na węzłach
- $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$
- zaś wielomian
- $L_1(x)$
- interpoluje funkcję
- f
- na węzłach
- $x_1, x_2, \dots, x_n$
- . Skonstruuj wielomiany
- $p_0(x), p_1(x) \in P_1$
- takie, że wielomian
- $p_0(x)L_0(x) + p_1(x)L_1(x)$
- interpoluje funkcję
- f
- na węzłach
- $x_0, x_1, \dots, x_n$
- .

10. Podać wzory ogólne na współczynniki wielomianów będących sumą oraz iloczynem dwóch wielomianów
- $p_1(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$
- i
- $p_2(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^{m-i}$
- .

11. Oblicz przybliżoną wartość
- $\sqrt{122}$
- stosując wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla funkcji
- $f(x) = \sqrt{x}$
- przyjmując jako węzły 100, 121, 144. Podaj oszacowanie błędu w punkcie 122.