Ćwiczenia 3 (45 min. 13.03.2020)

Warto zapoznać się z materiałem przedstawionym na tej stronie powtarzając teorię asymptotycznego tempa wzrostu:
https://pl.khanacademy.org/computing/computer-science/algorithms#asymptotic-notation
https://pl.wikipedia.org/wiki/Analiza_algorytm%C3%B3w

Zadanie
Podane funkcje przypisz do odpowiednich klas (uzupełniając poniższą tabelę)

$3^n + n^8 - 17;\ 2n^3 + n + 1;\ 2\log^2 n;\ n^2 + n\log n;\ 3n - 2;\ 2^n + 1;\ n!;\ n\sqrt{n};\ n^2\log^3 n;\ 2020;$

Klasa	Funkcje
$O(n)$	
$O(1)$	
$o(n)$	
$o(3^n)$	
$\Theta(n)$	
$\Theta(3^n)$	
$\Omega(n^2)$	
$\Omega(3^n)$	
$\Omega(1)$	
$\omega(3^n)$	
$\omega(n^2)$	
$\omega(1)$	

Rozwiązanie klasa $O(n)$

Sposób 1. Pamiętając, że klasa $O(n)$ (O duże) zawiera wszystkie funkcje których asymptotyczne tempo wzrostu („rząd wielkości") jest mniejsze lub równe „rzędowi" funkcji n widzimy, że do klasy $O(n)$ należą funkcje: $2\log^2 n;\ 3n-2;\ 2020;$

Sposób 2. Możemy również obliczyć granicę ilorazu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}$. Jeżeli ta granica istnieje i jest **stałą (równą zero albo dodatnią ale nie** ∞**)** to funkcja $f(n)$ należy do klasy $O(n)$.

np. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n} = 3$ - więc funkcja $3n-2$ **należy** do klasy $O(n)$

podobnie $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\log^2 n}{n} = 0$ - więc funkcja $2\log^2 n$ **należy** do klasy $O(n)$

ale $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+n+1}{n} = \infty$ - więc funkcja $2n^3+n+1$ **nie należy** do klasy $O(n)$

itd.

Sposób 3. Możemy również wykorzystać bezpośrednio definicję klasy O (duże O) zob. np.
https://pl.wikipedia.org/wiki/Analiza_algorytm%C3%B3w

Np. aby w oparciu o definicję pokazać, że funkcja $3n-2$ należy do klasy $O(n)$ musimy znaleźć stałe c_0 oraz n_0 takie że $3n-2 \le c_0 n$ dla wszystkich $n \ge n_0$

Łatwo zauważyć, że nierówność ta jest spełniona dla $c_0 = 3$ i wszystkich wartości n.

Uwaga: korzystanie z tej metody może prowadzić do skomplikowanych nierówności (których prawdziwość dla $n \geq n_0$ i tak najłatwiej jest udowodnić obliczając granice).

Rozwiązanie klasa $o(n)$

Sposób 1. Pamiętając, że klasa $o(n)$ (o małe) zawiera wszystkie funkcje których asymptotyczne tempo wzrostu („rząd wielkości") jest mniejsze „rzędowi" funkcji n widzimy, że do klasy $o(n)$ należą funkcje: $2\log^2 n;\ 2020;$

Uwaga: funkcja $3n-2;$ ma to samo tempo wzrostu co funkcja n więc należy do klasy $O(n)$ ale nie należy do klasy $o(n)$.

Sposób 2. Obliczając granicę ilorazu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}$ wybieramy te funkcje $f(n)$ dla których **wynik jest równy** 0 (zero).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\log^2 n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2020}{n}=0$$

ale

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}=3\neq 0$$

Rozwiązanie klasa $\Theta(n)$

Sposób 1. Pamiętając, że klasa $\Theta(n)$ (teta) zawiera wszystkie funkcje których asymptotyczne tempo wzrostu („rząd wielkości") jest równe „rzędowi" funkcji n widzimy, że do klasy $\Theta(n)$ należy tylko funkcja $3n-2;$

Sposób 2. Obliczając granicę ilorazu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}$ wybieramy te funkcje $f(n)$ dla których **wynik jest stałą różną od zera**.

Rozwiązanie klasa $\Omega(n^2)$

Sposób 1. Pamiętając, że klasa $\Omega(n^2)$ (omega duże) zawiera wszystkie funkcje których asymptotyczne tempo wzrostu („rząd wielkości") jest większy lub równy „rzędowi" funkcji n^2 widzimy, że do klasy $\Omega(n^2)$ należą funkcje

$$3^n+n^8-17;\ 2n^3+n+1;\ n^2+n\log n;\ 2^n+1;\ n!;\ n^2\log^3 n;$$

Sposób 2. Obliczając granicę ilorazu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^2}$ wybieramy te funkcje $f(n)$ dla których **wynik jest stałą różną od zera albo równy ∞ (nieskończoność)**.

np. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+n^8-17}{n^2}=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n\log n}{n^2}=1$

ale

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n^2}=0$$

Rozwiązanie klasa $\omega(n^2)$

Sposób 1. Pamiętając, że klasa $\omega(n^2)$ (omega małe) zawiera wszystkie funkcje których asymptotyczne tempo wzrostu („rząd wielkości") jest większy „rzędowi" funkcji n^2 widzimy, że do klasy $\omega(n^2)$ należą funkcje

$3^n + n^8 - 17; 2n^3 + n + 1; 2^n + 1; n!; n^2 \log^3 n;$

Sposób 2. Obliczając granicę ilorazu $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{n^2}$ wybieramy te funkcje $f(n)$ dla których **wynik jest równy** ∞ **(nieskończoność)**.

np. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3^n + n^8 - 17}{n^2} = \infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2 \log^3 n}{n^2} = \infty$

ale

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2 + n \log n}{n^2} = 1$