Ćwiczenia 1-2 (28.02.2020; 09.03.2020 - odrabiane za 06.03.2020)

Zadanie 1.
Która z podanych funkcji jest większego rzędu?
Rysując wykresy funkcji odpowiedz przy jakiej ilości danych wartości funkcji o wyższym rzędzie zaczynają przekraczać wartości drugiej funkcji?

a) $2^n; \quad 2020n$

b) $2^n; \quad n^7$

c) $\sqrt{n}; \quad 10\log n;$

d) $n^2; \quad 2020n\log n$

e) $n^2\log^5 n; \quad n^3\log n$

Zadanie 2.
Uporządkuj funkcje według tempa wzrostu

a) $\sqrt{n}; 2^n; 2020^2; \log n; n^3$

b) $5n^3; \left(\frac{5}{3}\right)^3; n!; n^4;$

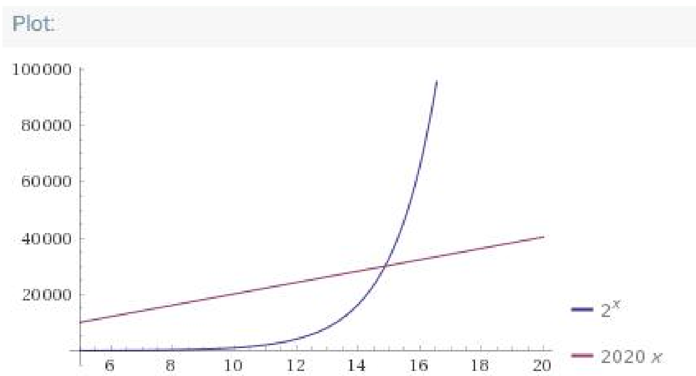
c) $n^2\log n; n\log^5 n; 30; n\sqrt{n}; \sqrt{n}; n^2\log^3 n;$

d) $\sqrt{n}; n^2\sqrt{n}; \log n; n^2; 5^n; n^3;$

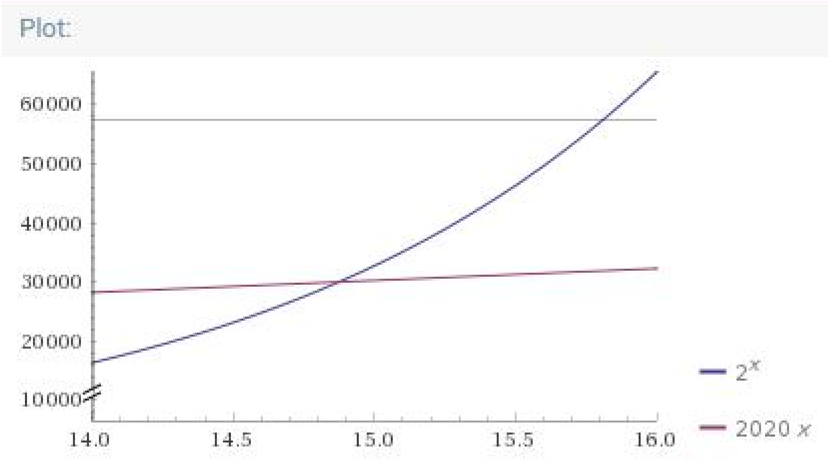
Rozwiązanie przykład a zadanie 1
Porównując funkcje $2^n; 2020n$ obliczamy granicę ich ilorazu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2020n}{2^n} = 0$$

i na tej podstawie możemy stwierdzić, że funkcja 2^n jest wyższego rzędu niż funkcja $2020n$.
Można też zapamiętać podstawowe funkcje (funkcja stała, funkcja logarytmiczna, funkcja potęgowa, funkcja wykładnicza, silnia)
Do narysowania wykresów funkcji możemy wykorzystać stronę WolframAlpha
Formuła `Plot[{2^x,2020x},{x,5,20}]` narysuje wykresy obydwu funkcji w jednym układzie współrzędnych dla $x \in [5; 20]$



Możemy zmienić przedział żeby jeszcze dokładniej zobaczyć punkt przecięcia
`Plot[{2^x,2020x},{x,14,16}]`



Na podstawie wykresu widzimy, że funkcja 2^n „wyprzedza” funkcję $2020n$ już przy $n = 15$.

Rozwiązanie przykład a zadanie 2

Porządkujemy funkcje $\sqrt{n}; 2^n; 2020^2; \log n; n^3$ - pamiętając kolejność podstawowych funkcji: funkcja stała, funkcja logarytmiczna, funkcja potęgowa, funkcja wykładnicza, silnia, zaczynamy od

i. funkcji stałej: 2020^2
ii. następnie funkcja logarytmiczna $\log n$
iii. następnie funkcje potęgowe (decyduje wykładnik) $\sqrt{n};\ n^3$ pamiętając że $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$
iv. na koniec funkcja wykładnicza 2^n

ostatecznie: $2020^2; \log n; \sqrt{n}; n^3; 2^n$

Rozwiązanie przykład c zadanie 2

Porządkujemy funkcje $n^2 \log n; n \log^5 n; 30; n\sqrt{n}; \sqrt{n}; n^2 \log^3 n;$

Podobnie jak poprzednio zaczynamy od funkcji stałej: $30;$

Następnie porównując iloczyny $n^\alpha \log^\beta n;$ warto pamiętać, że o **szybkości wzrostu decyduje wykładnik funkcji potęgowej**

np. rząd funkcji $n^2 \log^{2020} n;$ jest mniejszy niż rząd funkcji $n^3 \log n;$ bo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 \log^{2020} n}{n^3 \log n} = 0$

Posługując się tą regułą wybieramy najniższe wykładniki funkcji potęgowych, a następnie (jeżeli wykładnik funkcji potęgowych są takie same) porównujemy wykładniki funkcji logarytmicznych. Stąd mamy następującą kolejność

$\sqrt{n}; n \log^5 n; n\sqrt{n}; n^2 \log n; n^2 \log^3 n;$

Ostatecznie: $30; \sqrt{n}; n \log^5 n; n\sqrt{n}; n^2 \log n; n^2 \log^3 n;$