ĆWICZENIE 6. *Scilab: Obliczenia symboliczne i numeryczne*

Uwaga: Podczas operacji kopiowania i wklejania potrzeba skasować wklejone pojedyńcze cudzysłowy i wpisać je ręcznie dla każdego ich wystąpienia

6.1 Tworzenie wielomianów

Istnieją dwa sposoby tworzenia wielomianów. Pierwszy z nich.

p=poly([1 2 3],’z’,’coeff’)

p =

$\mathbf{1 + 2z + 3z^2}$

p jest wielomianem zmiennej z posiadającym trzy współczynniki 1,2,3.

Istnieje możliwość napisania samego ’c’ w miejsce ’coeff’.

Dodatkowo, jeśli pominiemy trzeci argument w wywołaniu funkcji będzie, to oznaczać, że generowany wielomian ma mieć pierwiastki podane jako pierwszy argument tu [1 2 3].

p=poly([1 2 3],’z’)

p =

$\mathbf{- 6 + 11z - 6z^2 + z^3}$

Powyższa konstrukcja stosowana jest w przypadku kolejno rosnących wykładników. Aby wygenerować dowolny wielomian np. zmiennej x

x=poly(0,’x’) \\tworzymy wielomian ze zmienną x i można teraz pisać w ten sposób:

p=1+x^2

$\mathbf{p=1+ x^2}$

6.2 Pierwiastki wielomianów

Pierwiastki wielomianów znajduje się poleceniem *roots(p),*

gdzie p jest wcześniej zdefiniowanym wielomianem lub wielomianem wpisanym bezpośrednio do wyrażenia:

p=poly([1 2 3],’z’,’c’)

roots(p)

ans =

- 0.3333333 + 0.4714045i
- 0.3333333 - 0.4714045i

6.2 Pochodna wielomianu

Polecenie do obliczenia pochodnej wielomianu to derivat.

derivat(p)

Polecenie horner() pozwala na wyliczenie wartości wielomianu w wybranym punkcie.

horner(p,3) – wartość wielomianu p w punkcie 3

6.3 Tworzenie funkcji

Tworzenie funkcji odbywa się w Scilabie na dwa sposoby:

Pierwszy jest prosty ale i ograniczony do prostych wyrażeń matematycznych. Korzystamy z polecenia **deff()**

deff(‘nazwa funkcji i sposób wywołania’,’to co oblicza, instrukcje do wykonania’)

Funkcję wywołujemy wg tego, co wpiszemy w pierwszym wyrażeniu.

*deff(‘z=sincos(x)’,’z=cos(x)*sin(x)’)*

-->*sincos(0)*

ans =

0.

Można też tak, gdy mamy więcej instrukcji do wykonania możemy umieścić zmienną i instrukcje w nawiasach kwadratowych.

```
deff('[x]=mojeplus(y,z)','x=y+z')
deff('[x]=mojemacro(y,z)',['a=3*y+1'; 'x=a*z+y'])
```

Drugi sposób definiowania funkcji polega na wykorzystaniu polecenia:

function[*lista arg zwracanych przez funkcję***]=nazwa_funkcji(***argumenty wywołania***)**

Ciąg instrukcji.....

endfunction

Przykład1

funkcja obliczająca iloczyn liczb naturalnych od 1 do n:

function[a]=iloczyn(n)

a=1

for x=1:n do

*a=a*x*

end

endfunction

-->b=iloczyn(4)
b=24

Przykład2

function[Pole, Obwod]=kolo(promien)

*-->Pole=%pi*promien^2*

-->Obwod=2%pi*promien*

-->endfunction

-->[P,O]=kolo(6)

O = 37.699112
P = 113.09734

6.4 Wykresy funkcji

Zanim narysujemy wykres należy zdefiniować przedział dla zmiennej - argumentu funkcji (zwykle x). Korzystamy z polecenia linspace:

x=linspace(wart poczatk, wart konc, ilość punktów podziału)

x =linspace(0,0.8,9)

x= 0. 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8

lub

x= wartość początkowa : przyrost : wartość ostateczna

x=0: 0.3: 1

x = 0. 0.3 0.6 0.9

<u>Kreslenie prostej grafiki</u>

Do rysowania prostych wykresów funkcji służy polecenie plot(x,y,x,y1) – rysuje dwa wykresy o argumentach x i wartościach y i y1 i plot2d(arg1, arg2, arg3)

arg1 – to zmienne określające dziedzinę, arg2 to zmienne przechowujące wartości funkcji

Wartości arg3 są pokazane w tabeli poniżej:

Kolor	Parametr	Kształt	Parametr
Czarny	1	+	-1
Niebieski	2	×	-2
Zielony	3	⊕	-3
Niebieski 2	4	◆	-4
Czerwony	5	◇	-5
Różowy	6	△	-6
Czerwony 2	7	▽	-7
Biały	8	✥	-8
Granatowy	9	○	-9
Granatowy 2	10	✳	-10
Granatowy 3	11	□	-11

Tabela nr 1. Możliwe wartości dla arg3.

Poniższy przykład ilustruje wykorzystanie tego polecenia:

x=linspace(0,2%pi,101);*

*plot(x, exp(-x).*sin(4*x))*

Polecenie do rysowania więcej niż jednej funkcji na jednym wykresie wyglada tak:

-->x=linspace(-1,1,61)';//wektor kolumnowy

-->x1=linspace(-3,1,61)';

-->y=x.^2;

*-->yter=2*y;*

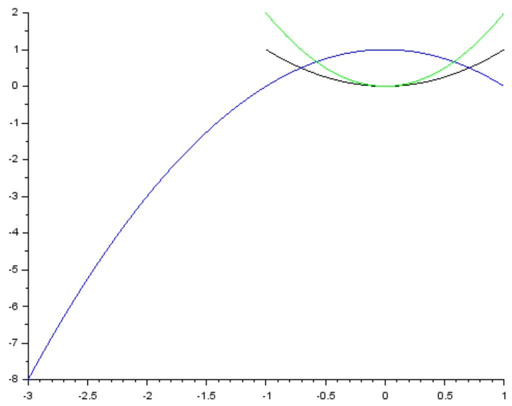
-->ybis=1-x1.^2;

jeżeli dziedzina wszystkich funkcji jest taka sama:

plot2d([x x x],[y ybis yter])

Jeżeli dziedzina funkcji jest różna w tym przypadku funkcja ybis ma dziedzinę należącą do zakresu wektora x1.

plot2d([x x1 x],[y ybis yter])



Rys nr1. Wykres trzech funkcji z różnymi dziedzinami

6.5 Całkowanie numeryczne

Obliczenie wartości całki oznaczonej jest stosunkowo proste i sprowadza się do wykorzystania polecenia *integrate()*.

[x]=integrate('expr','x',x0,x1),
gdzie expr to wyrażenie pod całką
x – zmienna całkowalna
x0,x1 granice całkowania

lub polecenie intg():
[v,err]=intg(a,b,f)
gdzie v to wartość całki
err to błąd
a i b to przedziały całkowania
f to nazwa funkcji np. zdefiniowana przy pomocy polecenia deff().

6.6 Obliczanie pochodnych

Obliczaniem pochodnych po jednej lub kilku zmiennych (wyznaczanie gradientu funkcji) zajmuje się funkcja: *numdiff():*
Przykład:

```
-->function[y]=fun(x)
-->y=(x-3).^2+4*x.^2
-->endfunction
-->numdiff(fun,2);
-->numdiff(fun,2)
 ans  =   14.
 numdiff(fun,0)
 ans  =  - 6.
```

6.7 Układy równań nieliniowych

Do obliczanie służy polecenie *fsolve(punkt start, funkcja).* Pierwsze ustalamy, jakie wektory będziemy mieli, czyli porządkujemy równania. Te same równania można zapisać w postaci macierzowej.
Przykład:

$$\begin{cases} x_2 - \cos(x_1) - 8 = 0 \\ x_2 - 2x_1 - x_1^2 - 4 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{aligned} &x_2 && -\cos(x_1) - 8 = y_1 \\ &x_2 - 2x_1 - x_1^2 && -4 = y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cos\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$aX + bX^2 + c\cdot\cos(X) + d = Y$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

```
function [Y]=fst(X)
//przyjmujemy X=[x1;x2], Y=[y1;y2]
a=[0,1;-2,1]; b=[0,0;-1,0]; c=[-1,0;0,0]; d=[-8;-4];
Y= a*X +b*X^2 + c*cos(X) + d
endfunction

// lub inny sposób:

function [Y]=fst(X)
Y= [X(2)-cos(X(1))-8; X(2)-2*X(1)-X(1)^2-4 ]
endfunction

// początkowym rozwiązaniem jest punkt (0,0)
xy1=fsolve([0;0],fst);
```

Znalezione rozwiązanie:
xy1=[1.2959523; 8.2713968]
punkt początkowy [-3,0]
xy2=fsolve([-3;0],fst);

Przykład prezentujący rozwiązanie podanego niżej równania. zmienne x i y wstawiono do wektora x, a wyniki przechowuje wektor z.

$$\begin{cases} y - x^2 + 1 = 0 \\ x - \dfrac{2y - y^2}{3} = 0 \end{cases}$$

```
function [z]=zadanie(x)
 z(1)=x(2)-x(1).^2+1;
 z(2)=x(1)-(2*x(2)-x(2).^2)/3;
endfunction

//Ustawienie osi na środku rysunku:
ster_axe=gca();
ster_axe.y_location="origin";
ster_axe.x_location="origin";

//szkicowanie wykresów:
x1=linspace(-3,3,101);
y1=x1.^2-1;
y2=linspace(-3,5,101);
x2=(2*y2-y2.^2)/3;
//3 i 5 oznacza kolor wykresu
plot2d(x1,y1,3);
plot2d(x2,y2,5);

//szukanie rozwiązań:
pocz=[-5;8];
//wartość bliska rozw. na szkicu wykresów
roz=fsolve(pocz,zadanie)
disp(roz)
plot2d(roz(1:1),roz(2:2),-5)

pocz=[3;-4];
roz=fsolve(pocz,zadanie)
disp(roz)
plot2d(roz(1:1),roz(2:2),-5)
//roz(1:1) – pierwsza wspólrzędna roz,
//roz(2:2) – druga wspolrzedna roz;
//-5 to znak rombu
```

Zadanie 1. ***Rozwiązania równań***

a) Znaleźć pierwiastki wielomianu $x^4 - 0.7x^3 + 7.1x^2 - 4.9x + 0.7$;

b) Znaleźć rozwiązania równania $y(x) = 0$, gdzie

$$y(x) = 16x^3 - 4.8x^2 + 5.6x - 9.6;$$

c) Znaleźć rozwiązania równania

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(x + \frac{59}{2}\right)^{\frac{1}{5}} + 1 = 0;$$

d) Znaleźć rzeczywiste rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^4 - 16 = 0. \end{cases}$$

Narysować wykresy funkcje i zrobić wizualizacje rozwiązań.

e) Znaleźć rzeczywisty rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} \sin\left(y + \frac{1}{2}\right) = x^2, \\ 3x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

Narysować wykresy funkcje i zrobić wizualizacje rozwiązań.

Zadanie 2. ***Obliczanie pochodnych w punkcie***

a) Obliczyć pochodną $f'(2)$, gdzie $f(x) = (x-3)^2 + 4x$;

b) Oblicz gradient funkcji y w punkcie (1,1):

$$y(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3 + x_2$$

c) Obliczyć pochodne (gradient funkcji y)

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}(2,-3,1), \quad \frac{\partial y}{\partial x_2}(2,-3,1), \quad \frac{\partial y}{\partial x_3}(2,-3,1),$$

gdzie $y = x_1^2 x_2^{x_3} + x_1 x_3^3$.

Zadanie 3. ***Znaleźć całki:***

a) $\int_2^7 \sqrt{4x - 3}\, dx$;

b) $\int_0^{\pi/2} \sin(3x)\, dx$.

Zadanie 4. Dla dowolnie ustalonych zmiennych x, y, z oblicz wartość zmiennych a i b:

(a) $a = \sqrt{|x-1|} - \sqrt[3]{|y|}, \quad b = x\left(\operatorname{arc\,tg} z + e^{-(x+3)}\right);$

(b) $a = \dfrac{3 + e^{y-1}}{|y - \operatorname{tg} z|}, \quad b = 1 + |y - x| + \dfrac{(y-x)^2}{2} + \dfrac{|y-x|^3}{3};$

(c) $a = (1+y)\dfrac{x + y/(x^2+4)}{e^{-x-2} + 1/(x^2+4)}, \quad b = \dfrac{1 + \cos(y-2)}{x^4 + \sin^2 z};$

(d) $a = \dfrac{2\cos(x - \pi/6)}{1/2 + \sin^2 y}, \quad b = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2};$

(e) $a = \ln\left|(y - \sqrt{|x|})\left(x - \dfrac{y}{z + x^2/4}\right)\right|, \quad b = \cos^2\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{z}\right).$

Pomocne funkcje:

abs	wartość bezwzględna, moduł
exp	eksponent
log	logarytm naturalny
log10	logarytm o podstawie 10
cos	cosinus (argument w radianach)
sin	sinus (argument w radianach)
sinc	$\frac{\sin(x)}{x}$
tan	tangente (argument w radianach)
cotg	cotangente (argument w radianach)
acos	arccos
asin	arcsin
atan	arctg
cosh	cosinus hiperboliczny
sinh	sinus hiperboliczny
tanh	tangens hiperboliczny
acosh	argch
asinh	argsh
atanh	argth
sqrt	pierwiastek kwadratowy

Zadanie 5. Wyznacz wartość sumy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}$$

Jak zapisać to działanie w kilku liniach? Jak obliczyć wartość analogicznego wyrażenia o 20 elementach?