04 Układy równań i rozkłady macierzy - Ćwiczenia

1. Wstęp

Środowisko Matlab można z powodzeniem wykorzystać do rozwiązywania układów równań z wykorzystaniem rozkładów macierzy m.in. Rozkładu Choleskiego, Eliminacji Gaussa lub QR.

Do wyznaczania powyższych rozkładów należy wykorzystać polecenia: `chol`, `lu` lub `qr`. Szczegóły dotyczące poleceń należy szukać w podręczniku Matlab.

2. Rozkład Choleskiego

Rozkład Choleskiego pozwala na przedstawienie symetrycznej macierzy w postaci produktu macierzy trójkątnej i jej transpozycji.

$$A = R' * R$$

gdzie R jest macierzą górnie trójkątną.

Niestety nie wszystkie macierze symetryczne mogą być rozłożone w ten sposób. Warunkiem rozkładu jest fakt, że macierz A musi być *macierzą hermitowską* (m.in. symetryczną) i *dodatnio określoną*.

def.1 Macierz A nazywamy *macierzą hermitowską* [1], jeżeli $A = A^*$, przy czym $A^* = (\bar{A})^T$, a więc $\bigwedge_{i,j=1,2,\dots,n} a_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

def.2 Macierz hermitowska jest *dodatnio określona*, jeżeli spełniony jest warunek:

$$\bigwedge_{x \neq \Theta} x^* A x > 0$$

gdzie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \Theta = (0,0,\dots,0)^T$.

[1] Jeżeli macierz hermitowska ma wyrazy rzeczywiste to jest to po prostu macierzą symetryczna.

Przykład 1

Do przykładu wykorzystajmy macierz Pascala rozmiaru 6x6:

```
>> A=pascal(6)

A =

     1     1     1     1     1     1
     1     2     3     4     5     6
     1     3     6    10    15    21
     1     4    10    20    35    56
     1     5    15    35    70   126
     1     6    21    56   126   252
```

która jest symetryczna i dodatnio określona. Następnie wyznaczamy macierz górnie trójkątną:

```
>> R=chol(A)

R =

     1     1     1     1     1     1
     0     1     2     3     4     5
     0     0     1     3     6    10
     0     0     0     1     4    10
     0     0     0     0     1     5
     0     0     0     0     0     1
```

Po czym możemy rozwiązać układ równań `A*x=b`. Podstawiamy `A=R'*R` do równania i otrzymujemy nowe równanie:

$$R' * R * x = b$$

a następnie wykorzystując dzielenie lewostronne z operatorem *backslash* otrzymujemy rozwiązanie:

```
>> x=R\(R'\b)
```

Znalezienie macierzy górnie trójkątnej rozmiaru n x n jest operacją o złożoności $O(n^3)$, natomiast rozwiązanie przy użyciu dwukrotnego zastosowania backslash'a $O(n^2)$.

3. Rozkład LU

Rozkład macierzy LU inaczej nazywamy metodą Eliminacji Gaussa. Rozkład pozwala na przedstawia każdej kwadratowej macierzy A jako produkt permutacji dolnie trójkątnej macierzy i górnie trójkątnej macierzy:

$$A = L * U$$

gdzie L jest permutacją dolnie trójkątnej macierzy z jedynkami na przekątnej, natomiast U jest macierzą górnie trójkątną.

Przykład 2

Dany jest układ równań A*x=b, gdzie:

```
A =
     1     3    -2
    -2    -5     5
    -1    10    20

b =
    -3
     5
    -5
```

Obliczamy rozkład LU za pomocą polecenia:

```
>> [L,U]=lu(A)

L =

   -0.5000    0.0400    1.0000

    1.0000         0         0

    0.5000    1.0000         0

U =

   -2.0000   -5.0000    5.0000

         0   12.5000   17.5000

         0         0   -0.2000
```

Następnie możemy szybko wyznaczyć rozwiązanie poleceniem:

```
>> x=U\(L\b)

x =

    5.0000

   -2.0000

    1.0000
```

Opcjonalnie możliwe jest także wyznaczenie macierzy permutacji P, patrz podręcznik.

4.Rozkład QR

Za pomocą rozkładu QR lub inaczej rozkładu ortogonalnego możemy przedstawić macierz prostokątną jako produkt macierzy ortogonalnej (unitarnej w przypadku liczb zespolonych) i macierzy górnie trójkątnej:

$$A = QR$$

Opcjonalnie możliwe jest też wyznaczenie macierzy permutacji P spełniającej równanie:

$$AP = QR$$

gdzie P to macierz permutacji, Q to macierz ortogonalna oraz R to macierz górnie trójkątna.

Możemy rozróżnić 4 typy rozkładu QR: pełny, ekonomiczny, przy czym z macierzą permutacji lub bez.

Nadokreślone układy równań [2] zawierają prostokątną macierz główną, która ma więcej wierszy niż kolumn, np. rozmiaru mxn gdzie $m > n$.

Pełny rozkład zakłada określenie kwadratowej macierzy Q wymiaru m x m oraz macierzy prostokątnej górnie trójkątnej R wymiaru mxn.

Przykład 3

[2] mające więcej równań niż zmiennych

Mając daną macierz A , pełny rozkład wyznaczamy przy pomocy polecenia `qr`:

```
A =                    b =
      1     1     1          6
      1     2     3          7
      1     3     6         -4
      3     3     3         19
```

```
>> [Q,R]=qr(A)
```

```
Q =

   -0.2887    0.1213   -0.0443   -0.9487

   -0.2887   -0.3638    0.8856   -0.0000

   -0.2887   -0.8489   -0.4428    0.0000

   -0.8660    0.3638   -0.1328    0.3162

R =

   -3.4641   -4.3301   -5.4848

         0   -2.0616   -4.9720

         0         0   -0.4428

         0         0         0
```

Natomiast rozkład ekonomiczny dodając 0 w poleceniu:

```
>> [Q,R]=qr(A,0)
```

```
Q =

   -0.2887    0.1213   -0.0443

   -0.2887   -0.3638    0.8856

   -0.2887   -0.8489   -0.4428

   -0.8660    0.3638   -0.1328

R =

   -3.4641   -4.3301   -5.4848

         0   -2.0616   -4.9720

         0         0   -0.4428
```

zawierający macierz Q o rozmiarze mxn oraz macierz kwadratową R rozmiaru nxn. Zabieg zmniejszenia macierzy (o $m-n$ kolumn od końca dla Q i usunięcie wierszy zerowych dla R) jest zasadny przy większych macierzach.

Opcjonalna permutacja kolumn rozkładu, wywołana obecnością trzeciego argumentu wyjściowego polecenia qr jest użyteczna ze względu na wykrywanie osobliwości lub spadku rzędu macierzy [3]. Polecenie wyświetlające dodatkową macierz permutacji można wyświetlić:

```
>> [Q,R,P]=qr(A)
```

oraz opcjonalnie w wersji ekonomicznej:

```
>> [Q,R,P]=qr(A,0)
```

w której P jest wektorem.

Kontynuując rozważania <u>bez macierzy permutacji</u> [4], rozkład QR transformuje nadinterpretowany układ liniowy w równoważny układ trójkątny.

Wyrażenie

`norm(A*x-b)`

jest równoważne[5] wyrażeniu

`norm(Q*R*x-b)`

Ponieważ mnożenie przez macierz ortogonalną zachowuje normę Euklidesową, powyższe wyrażenie jest równe:

`norm(R*x-y)`

gdzie y=`Q'*b`. Ponieważ ostatnie $m-n$ wierszy macierzy R to same zera, wyrażenie to jest rozbite na dwie części:

`norm(R(1:n,1:n)*x-y(1:n))`

oraz

`norm(y(n+1:m)).`

[3] np. dla macierzy mxn, rząd będzie ostro mniejszy niż $min(m,n)$.

[4] Uwaga: Jeżeli podamy w poleceniu [Q,R] albo [Q,R,P] to otrzymamy różne macierze Q i R!

[5] w Matlabie z dokładnością do błędu.

W przypadku gdy A ma rząd równy dokładnie $min(m, n)$ możliwe jest znalezienie rozwiązania x, tak więc pierwsze z powyższych wyrażeń jest równe zero. Natomiast drugie wyrażenie określa normę residuum (błąd).

Rozwiązanie ma postać:

$$x = R\backslash(Q' * b)$$

z błędem określonym przez

$$y((n + 1): m)$$

w naszym przypadku:

```
>> y=Q'*b

y =

  -19.0526

    8.4887

    5.1808

    0.3162

>> x=R\(y)

x =

   -6.1000

   24.1000

  -11.7000
```

z błędem $y(4: 4)$= 0.3162.

W przypadku, gdy A ma rząd mniejszy ostro niż $min(m, n)$, trójkątna struktura macierzy R umożliwia znalezienie rozwiązania dla problemu najmniejszych kwadratów.

Ćwiczenia

Zad.1. Rozwiąż poniższe układy równań

a) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 1 = -2x_3 \\ -2 + x_1 - 2x_2 = x_3 \\ 3x_1 - x_2 - 3 = -5x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$

Jakiego typu są to układy równań?

Zad.2. Korzystając z metody Cholesky'ego wyznacz rozkład $A = LL^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Zad.3. Dla podanego układu równań:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 4 \\ -2x_1 + 8x_2 + 40x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 11x_4 = -18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + 14x_3 + 14x_4 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + 14x_3 + 30x_4 = -20 \end{cases}$

znajdź macierz górnie trójkątną R rozkładu Choleskiego, a następnie znajdź rozwiązanie tą metodą.

Zad.4. Dla macierzy A, stosując metodę eliminacji Gaussa, wyznacz macierz permutacji P oraz macierze L i U takie, że $PA = LU$ (L jest macierzą dolnie trójkątną , natomiast U macierzą górnie trójkątną).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zad.5. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozłóż macierz A na iloczyn macierzy górno i dolno trójkątnej. Wykorzystaj otrzymany rozkład do rozwiązania układu równań $Ax = b$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Zad.6. Znajdź rozkład QR (z dodatkową macierzą permutacji P) dla macierzy:

```
H =
        1       4      10      20
        1       3       6      10
        1       2       3       4
        1       1       1       1
```

Zad.7. Wykorzystując rozkład QR (pełny bez macierzy permutacji) znajdź przybliżone rozwiązanie układu równań $Ax = b$:

```
A =                                              b =
       10       7       8       7                      3
        7       5       6       5                     -2
        8       6      10       9                      2
        7       5       9      10                     -1
        1       3       2       4                      1
```