Ćwiczenie 3. MatLab: Algebra liniowa. Rozwiązywanie układów liniowych

*Wszystko proszę zapisywać komendą **diary** do pliku o nazwie: imie_ nazwisko*

1. Definiowanie macierzy i odwoływanie się do elementów:

Definicji macierzy można dokonać na kilka sposobów:
– przez wymienienie elementów,
– przez wygenerowanie elementów,
– przez zbudowanie z innych macierzy,
– poprzez zastosowanie dwóch lub więcej wyżej wymienionych technik razem.

- Elementy w wierszu macierzy muszą być oddzielane spacją lub przecinkami.
- Średnik lub znak nowego wiersza kończy wiersz macierzy i powoduje przejście do następnego.

Zaleca się wcześniejsze generowanie macierzy przez rezerwowanie pamięci, gdy jej rozmiar jest znany.

W tym celu można stosować instrukcje:

Tab.1

eye(n)	macierz jednostkowa nxn;
eye(n, m)	z jedynkami na głównej przekątnej
ones(n)	macierz jedynek nxn;
ones(n,m)	macierz jedynek nxm;
zeros(n)	macierz zerowa nxn;
pascal(n)	tworzenie macierzy trójkąta Pascala (trójkąt arabski)
magic(n)	macierz o równej sumie wierszy i kolumn o elementach od 1 do n^2
rand(n)	macierz nxn liczb pseudolosowych z przedziału <0,1> o rozkładzie jednostajnym;
randn(n)	macierz nxn liczb pseudolosowych o rozkładzie normalnym ze średnią 0 i wariancją 1
tril(A)	tworzy z macierzy A macierz dolnie trójkatną.
triu(A)	tworzy z macierzy A macierz górnie trójkatną.

Odwołanie do elementów macierzy:
- podanie zakresu wierszy i kolumn (od,do) za pomocą operatora dwukropka, na przykład:

Tab 2.

A(i,:)	i-ty wiersz macierzy A
A(:,j)	j-ta kolumna macierzy A
A(:)	Cała macierz w postaci wektora kolumnowego
A(:,:)	Cała macierz (dwuwymiarowa)
A(i,j:k)	Elementy i-tego wiersza macierzy A o numerach od j do k (kolumny od j do k)
A(i:j,k:l)	Elementy od i-tego do j-tego wiersza oraz od k-tej do l-tej kolumny
A(X,i:j)	Wszystkie elementy w kolumnach od i do j i wierszach macierzy A o numerach określonych przez elementy wektora X

2. Operacje na macierzach: długość, przekątna, maksimum, minimum, dodawanie, mnożenie, iloczyn skalarny, potęgowanie macierzy, operacje tablicowe.

Tab3.

`cumprod`	wyznacza nowy wektor zgodnie ze wzorem: $y_k = \prod_{i=1}^{k} x_i$ dla wejściowego wektora X . (macierz jest czytana kolumnami)
`cumsum`	analogicznie, wyznacza sumy elementów zgodnie ze wzorem $y_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$
[n m]=size(A)	przypisuje zmiennej n liczbę wierszy, a zmiennej m liczbę kolumn;
n=size(A,1)	przypisuje zmiennej n liczbę wierszy macierzy A;
m=size(A,2)	przypisuje zmiennej m liczbę kolumn macierzy A;
length(x)	zwraca długość wektora x lub dłuższy z wymiarów macierzy.
diag(A)	zwraca wektor z elementów na przekątnej macierzy
max(A)	element maksymalny w kolumnie
min(A)	element minimalny w kolumnie
mean(A)	średnia elementów z kolumny
median(A)	mediana
`std`	odchylenie standardowe,
`sum`	suma
`prod`	iloczyn, j.w.
linspace(x1,x2)	wektor równomiernych liczb generuje wektor wierszy składających się ze
linspace(x1,x2,n)	100 punktów z równym odstępem miedzy x1 a x2 - gdy jest n określamy ilość punktów między x1 a x2

b) Operacje tablicowe[1] – wykonywane na każdym z elementów macierzy. Symbol zwykłej operacji poprzedzony jest **kropką.**
- Macierze muszą być tych samych wymiarów

-Dodawanie oraz odejmowanie tablicowe i macierzowe są tożsame.

B.\A ==A./B

A.\B==B./A

Potęgowanie (tablicowe)

$$A.\hat{}k = \begin{bmatrix} a_{11}^{\,k} & a_{12}^{\,k} \\ a_{21}^{\,k} & a_{22}^{\,k} \end{bmatrix}$$

Potęgowanie (macierzowe)

$$A\hat{}k = \underbrace{A * A * A * \ldots * A}_{k}$$

Dzielenie prawostronne (tablicowe)

$$A./B = \begin{bmatrix} a_{11}/b_{11} & a_{12}/b_{12} \\ a_{21}/b_{21} & a_{22}/b_{22} \end{bmatrix}$$

Dzielenie lewostronne (tablicowe)

$$A.\backslash B = B./A = \begin{bmatrix} b_{11}/a_{11} & b_{12}/a_{12} \\ b_{21}/a_{21} & b_{22}/a_{22} \end{bmatrix}$$

Dzielenie prawostronne (macierzowe)

$$A/B = A \cdot B^{-1}$$

Dzielenie lewostronne (macierzowe)

$$A\backslash B = A^{-1} \cdot B$$

Mnożenie (tablicowe)

$$A.*B = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & a_{12} \cdot b_{12} \\ a_{21} \cdot b_{21} & a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Mnożenie (macierzowe)

$$A*B = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

3. Wyznacznik, macierz transponowana, macierz odwrotna, suma elementów w macierzy

- wyznacznik macierzy: det(A),
- macierz odwrotna: inv(A),
- macierz transponowana: A'

suma elementów:

- sum(A) lub sum(A,1)– wynikiem jest wektor składający się z sum kolumn macierzy A.

- sum(A')' lub sum(A,2) – wynikiem jest wektor kolumnowy składający się z sum wierszy macierzy A.
- sum(diag(A)) -wynikiem jest suma elementów znajdujących się na głównej przekątnej macierzy,
- sum(diag(fliplr(A)))- wynikiem jest suma elementów na drugiej przekątnej (funkcja *fliplr*, zaprojektowania do użycia przy obsłudze grafiki, odpowiednio odwróci macierz)

4. Rozwiązywanie układów liniowych

Rozwiązywanie układów równań w Matlabie sprowadza się do rozwiązania problemu:

Dane są dwie macierze A i B. Czy istnieje macierz X dla której spełnione jest AX=B lub XA=B?

Rozwiązaniem pierwszego równania, o ile istnieje, jest A\B, natomiast drugiego B/A.

Możemy rozróżnić trzy przypadki rozwiązań. Niech macierz A będzie wymiaru m xn :

Przypadek	Co oznacza
m=n	układ oznaczony, istnieje jedno rozwiązanie
m>n	układ nieokreślony, więcej równań niż zmiennych
m<n	układ nieoznaczony, więcej zmiennych niż równań

4.1. Układ oznaczony

Dysponując układem równań:

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + \cdots + x_n a_{1n} & = & b_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ x_n a_{n1} + \cdots + x_n a_{nn} & = & b_n \end{cases}$$

możemy je przekształcić na postać macierzową:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

gdzie $det(A) \neq 0$, a następnie obliczyć łatwo rozwiązanie poleceniem A\B.

Dla przykładu, dany jest układ równań:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 3x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

który możemy zapisać w rachunku macierzowym:

```
A =
    1    2
    3    4
B =
    5
    6
```

Natomiast rozwiązaniem jest

```
>> X=A\B
X =
  -4.0000
   4.5000
```

Macierz A w tym przypadku ma zgodną liczbę kolumn i wierszy. Alternatywnie można użyć też polecenia: `linsolve(A, B)`.

4.2. Układ sprzeczny

Dobrym przykładem zastosowania jest zagadnienie aproksymacji linii dla istniejących danych eksperymentalnych, np. odczyt wartości nieznanej funkcji dla kolejnych chwil czasu t .
Problemem jest wyznaczenie wzoru funkcji $y(t)$ najbardziej odpowiadającej dla par $(t_1, y(t_1)), (t_2, y(t_2)), \ldots, (t_n, y(t_n))$.

Przykładowo w tabelce zestawione zostały wartości pomiarów w odpowiednich chwilach czasu:

t	y
0.0	0,82
0.3	0,72
0.8	0,63
1.1	0,60

1.6	0,55
2.3	0,50

natomiast aproksymować nieznaną funkcję będziemy inną funkcją postaci np.

$$y(t) \approx c_1 + c_2 e^{-t}$$

gdzie wartości c_1 i c_2 są nieznane. Wyznaczyć je możemy metodą najmniejszych kwadratów, która to minimalizuje sumę kwadratów błędów przy rozwiązywaniu każdego z równań.

Rozwiązanie problemu w Matlabie:
Zdefiniowanie danych:

```
t=[0 .3 .8 1.1 1.6 2.3]';
y=[.82 .72 .63 .60 .55 .50]';
```

Wyznaczenie wartości współczynników c_1 i c_2
:

```
E=[ ones(size(t)) exp(-t) ];
c=E\y
```

Otrzymujemy przybliżenie

$$y(t) \approx 0.4760 + 0.3413e^{-t}$$

które następnie możemy wizualizować na wykresie:

```
T=(0:0.1:2.5)'
Y=[ones(size(T)) exp(-T)]*c
plot(T,Y,'-',t,y,'o')
```

4.3 Układ nieoznaczony

W tym przypadku mamy do czynienia z większą liczbą zmiennych niż równań w układzie. Jest to zagadnienie programowania liniowego. Przy znajdywaniu rozwiązań parametrycznych wykorzystywany jest rozkład QR.

Przykładowo dane są macierze zdefiniowane losowo:

```
R=fix(10*rand(2,4));
b=fix(10*rand(2,1));
```

zamieniamy format wyświetlania danych na ułamkowy:

```
format rat
```

a następnie wyznaczamy

```
p=R\b
Z=null(R,'r')
```

wtedy mnożenie $R*Z$ da macierz zerową, lub bliską zerowej. Następnie każdy wektor w postaci:

$$x = p + Z * q$$

dla dowolnego wektora q, spełnia równanie $R * x = b$, a więc jest rozwiązaniem równania wejściowego.

Ćwiczenia

Zad.1.
a) Wykonaj następujące operacje zwykłe na macierzach:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} =$$

b) Wykonaj powyższe operacje korzystając z operacji tablicowych. Zobacz jaka jest różnica.

c) Zapisz stworzoną przez Ciebie macierz i oblicz jej drugą potęgę dla obu rodzajów operatorów potęgowania.

- obliczyć macierz odwrotną oraz wyznacznik:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & -5 & 9 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Zad.2.

$$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

Powyższa macierz jest macierzą Durera – magicznym kwadratem. Jeśli dodasz do siebie wszystkie liczby z dowolnego wiersza lub kolumny, czy też z jednej z dwóch głównych przekątnych, otrzymasz zawsze ten sam wynik. Sprawdź, korzystając z funkcji sum i transpozycji, to w MATLAB-ie.

Zad.3.
Z podanej macierzy 4x4 wypisz po 3 macierze 3x3 oraz 2x2.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Zad.4. Dla 100 elementowego wektora A oblicz:
a) sumę elementów
b)średnią elementów
c) medianę
d)odchylenie standardowe
e)liczbę elementów

Zad.5. Dla macierzy A o wymiarach 5x5 oblicz sumę wszystkich elementów.

Zad.6. Stwórz wektor 9 liczb z przedziału od 5 do 15, które są posortowane i ułożone równomiernie.

Zad.7. W wektorze Kwoty =[30, 25, 20, 34, 32] są umieszczone sumy pieniężne dla poszczególnych dni tygodnia. Wyznacz skumulowany wektor sum, w którym są przechowywane sumy wartości kwot z poprzednich dni.

Zad.8. Stwórz macierz rozmiaru 5x5 o liczbach losowych całkowitych z przedziału 1 do 9 (np. losowanych równomiernie).