

Ćwiczenie 8. Mathematica: Obliczenia symboliczne. Analiza.

8.1. Pochodne

Tradycyjny rachunek różniczkowy obejmuje pochodne, szeregi Taylora i granice; odpowiadające im polecenia w programie Mathematica to **D**, **Series** i **Limit**.

$D[f, x]$ $\partial f / \partial x$ $D[f, x, y]$ $\partial^2 f / (\partial x \partial y)$
 $D[f, \{x, 2\}]$ $\partial^2 f / \partial x^2$ $D[f, x, y, y]$ $\partial^3 f / (\partial x \partial y^2)$

W języku Mathematica możesz zapisać całe wyrażenie do zróżniczkowania bezpośrednio w funkcji **D**, na przykład $D[(x + \alpha)^2, x]$, albo możesz najpierw nadać wyrażeniu nazwę, taką jak $h = (x + \alpha)^2$, a następnie użyć tej nazwy, na przykład w wyrażeniu $D[h, x]$. Funkcje takie jak $f[x]$ można różniczkować po prostu za pomocą zapisu $f'[x]$.

Innym sposobem obliczania pochodnych cząstkowych jest użycie przycisków $\partial_{\square}$ i $\partial_{\square, \square}$ na palecie BasicMathInput. Możesz też zrobić to ręcznie: Napisz ∂ jako $\text{ESC} \text{pd} \text{ESC}$, przejdź do indeksu dolnego naciskając $\text{CTRL}+[-]$, wpisz zmienną, wyjdź z pozycji indeksu dolnego za pomocą $\text{CTRL}+[\text{spacja}]$ i napisz wyrażenie.

Mathematica zna różne reguły różniczkowania, np.

In[]:=

Clear[f, g]

$\downarrow$ wyczyść

D[f[x] * g[x], x] // Simplify

$\downarrow$ oblicz pochodną $\downarrow$ uprość

Out[]:= $g[x] f'[x] + f[x] g'[x]$

Przykład 8.1.

Określmy funkcję $f(x) = c \sin x$, gdzie c jest stała

In[]:=

f[x] := c Sin[x]

$\downarrow$ sinus

Obliczymy pochodną

In[]:=

D[f[x], x]

$\downarrow$ oblicz pochodną

Out[]:=

$c \cos[x]$

Przykład 8.2.

Znajdziemy pochodną funkcji $y = \ln \cot x$, stosując wzór do obliczenia pochodnej funkcji złożonej

In[]:=

D[Log[Cot[x]], x] // FullSimplify

$\downarrow$ $\downarrow$ cotangens $\downarrow$ uprość pełniej

Out[]:=

$-\csc[x] \times \sec[x]$

Oczywiście, że otrzymany wynik jest równoznaczny $-\frac{2}{\sin 2x}$

In[]:=

% == - $\frac{2}{\sin[2x]}$ // Simplify
 $\downarrow$ uprość

Out[]:= True

Przykład 8.3. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \arcsin x$ w punkcie $(\frac{1}{2}; 0)$.

Określmy funkcję $f(x) = \arcsin x$.

In[]:=

f[x_] := ArcSin[x]
arcus sinus

Znajdziemy pochodną funkcji $\arcsin x$ i wartość tej funkcji w punkcie $x = \frac{1}{2}$

In[]:=

f'[x]

Out[]:=

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

In[]:=

f'[1/2]

Out[]:=

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Równanie stycznej $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$ ma postać

In[]:=

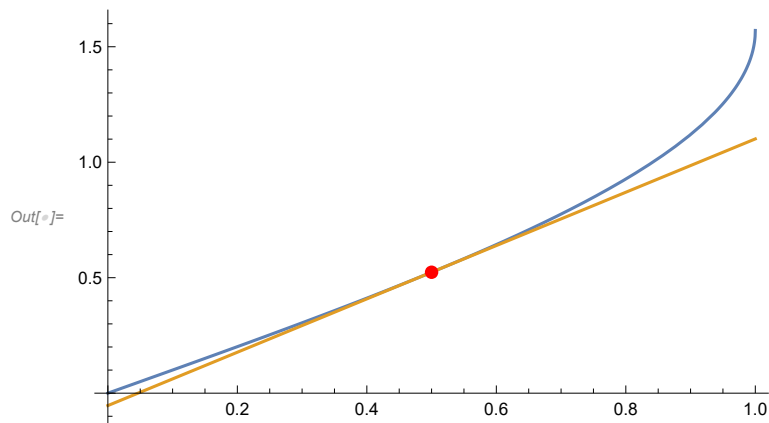
$$y - f\left[\frac{1}{2}\right] = f'\left[\frac{1}{2}\right]\left(x - \frac{1}{2}\right) // \text{Simplify}$$
uproszcz

$$y = \frac{\pi}{6} + \frac{-1 + 2x}{\sqrt{3}}$$

Naszkicujemy wykres stycznej $y = \frac{\pi}{6} + \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ do krzywej $y = \arcsin x$ w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6})$ oznaczonym kropką.

In[]:=

Plot[{f[x], f[1/2] + f'[1/2](x - 1/2)}, {x, 0, 1}, Epilog -> {PointSize[Large], Red, Point[{1/2, ArcSin[1/2]}]}]
wykres doprac... rozmiar... duży cz... punkt arcus sinus



8.2. Szeregi

Taylor Series

Series[f, {x, a, n}] Szereg Taylora funkcji f względem zmiennej x wokół punktu a , uwzględniający wyrazy do n -tej potęgi $x - a$

In[]:=

Series[Sin[a x], {x, 1, 3}]**[sze...** **[sinus**

Out[]:=

$$\sin[a] + a \cos[a] (x-1) - \frac{1}{2} (a^2 \sin[a]) (x-1)^2 - \frac{1}{6} (a^3 \cos[a]) (x-1)^3 + O[x-1]^4$$

Pozostała część ma postać wielkiej litery O. W standardowej notacji matematycznej reszta byłaby zapisana jako $O((x-1)^4)$, co oznacza wyrazy, w których potęga $x-1$ wynosi co najmniej 4. Oto kolejny przykład:

In[]:=

sz = Series**[** $\frac{1}{x-1}$ **, {x, 0, 3}]**
[szereg

Out[]:=

$$-1 - x - x^2 - x^3 + O[x]^4$$

Możemy to obliczyć za pomocą rozwinięcia w szereg Taylora:

In[]:=

sz³

Out[]:=

$$-1 - 3x - 6x^2 - 10x^3 + O[x]^4$$

W tym przypadku wszystkie wyrazy rzędu wyższego niż trzeci zostały zebrane w reszcie. Możemy również obliczyć pochodne i całki (zwróć uwagę na zmianę w reszcie):

In[]:=

D[sz, x]**[oblicz pochodną****Integrate[sz, x]****[całka**

Out[]:=

$$-1 - 2x - 3x^2 + O[x]^3$$

Out[]:=

$$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O[x]^5$$

Funkcje nieokreślone są traktowane prawidłowo:

In[]:=

Clear[f]**[wyczyść****Series[f[x], {x, 0, 3}]****[szereg**

Out[]:=

$$f[0] + f'[0] x + \frac{1}{2} f''[0] x^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}[0] x^3 + O[x]^4$$

Wielomian Taylora**Normal[series]** Pomiąć resztę w szeregu Taylora

In[]:=

Normal[sz]**[normalne wyrażenie**

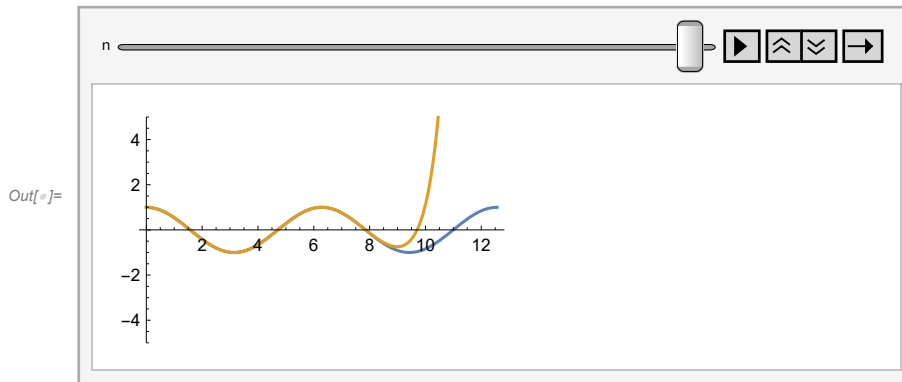
Out[]:=

$$-1 - x - x^2 - x^3$$

Wynikiem jest zwykłe wyrażenie, a teraz wszystkie obliczenia są wykonywane tak, jak w przypadku zwykłych wyrażeń.

Poniższa animacja przedstawia wielomiany Taylora funkcji $\cos x$ w punkcie $x = 1$ do stopnia 20:

```
In[ ]:= Animate[Plot[Evaluate[{Cos[x], Normal[Series[Cos[x], {x, 1, n}]]}], {x, 0, 4 π},
  PlotRange → {-5, 5}, ImageSize → 200], {n, 0, 20, 1}, AnimationRunning → False]
  
```



Granice

Limit[f , $x \rightarrow a$] Granica f dla x zbliżającego się do a ;

Opcje:

Direction Kierunek, z którego zbliżamy się do punktu a ; możliwe wartości: **Automatic** (zazwyczaj oznacza -1), -1 (od góry), 1 (od dołu);

Assumptions Założenia dotyczące parametrów; przykłady wartości: **\$Assumptions**, $a > 0$

In[]:=

```
Limit[Sin[x - 1], x → 1]
```

```
Limit[x, x → 0, Direction → -1]
```

```
Limit[x, x → 0, Direction → 1]
```

Out[]:= 1

Out[]:= 0

Out[]:= $-\infty$

Całkowanie

Do obliczenia całek nieoznaczonych $\int f(x) dx$ *Mathematica* zawiera instrukcję **Integrate**[f , x]. Dowolną stałą, która pojawia się przy całkowaniu przyjmuje się za zero. Obliczymy $\int x \cos x dx$.

In[]:=

```
Integrate[x Cos[x], x]
```

Out[]:=

```
Cos[x] + x Sin[x]
```

Przy obliczaniu całki oznaczonej $\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x) dx$ stosujemy instrukcję **Integrate** z drugim argumentem w postaci listy: **Integrate**[$f(x)$, { x , $x_{\min}$, $x_{\max}$ }], gdzie x – zmienna całkowania, $x_{\min}$ i $x_{\max}$ są granicami całkowania.

In[]:=

```
Integrate[ $\frac{1}{x^4 + x^2 + 4}$ , {x, 0, Infinity}]
```

[całka] [nieskończoność]

Out[]:=

$$\frac{\pi}{4\sqrt{5}}$$

Użycie założeń (Assumptions):

Jest to najważniejsza opcja, gdy całka zawiera parametry (np. n, a, b). Pozwala ona dostarczyć systemowi informacji o parametrach, co często prowadzi do uzyskania bardziej precyzyjnego wyniku.

Opcję **Assumptions** można dodać bezpośrednio do funkcji Integrate.

In[]:=

```
Integrate[Ex/α, {x, 0, Infinity}, Assumptions → α < 0]
```

[całka] [nieskończoność] [założenia]

Out[]:=

− α

Integracja numeryczna

Jeśli **Integrate** nie obliczy całki oznaczonej, zastosuj całkowanie numeryczne. Możesz najpierw spróbować całkowania dokładnego, a jeśli nie uzyskasz wyniku, poproś o wartość liczbową.

Próbujemy obliczyć następującą całkę

In[]:=

```
int = Integrate[Sin[Cos[x2]], {x, 0, π}]
```

[całka] [sinus]

Out[]:=

$$\int_0^{\pi} \sin[\cos(x^2)] dx$$

Całkowanie dokładne nie powiodło się, i dlatego stosujemy metody numeryczne

```
% // N
```

[przybliżenie numeryczne]

Możemy również bezpośrednio uciec się do metod numerycznych.

In[]:=

```
NIntegrate[Sin[Cos[x2]], {x, 0, π}]
```

[numeryczny] [sinus]

Out[]:= 0.485846

Równania różniczkowe

W programie Mathematica dysponujemy dwoma głównymi narzędziami:

DSolve – służy do znajdowania rozwiązań symbolicznych (analitycznych).

NDSolve – służy do znajdowania rozwiązań numerycznych.

Oba polecenia są bardzo wszechstronne i akceptują:

Jedno lub wiele równań.

Równania pierwszego lub wyższego rzędu.

Równania liniowe i nieliniowe.

Zagadnienia początkowe (initial value problems) oraz brzegowe (boundary value problems).

Szczegóły dotyczące **DSolve**.

Funkcja **DSolve** jest szczególnie potężna w przypadku równań liniowych:

Potrafi rozwiązać liniowe równania różniczkowe o stałych współczynnikach dowolnego rzędu.

Może również rozwiązać wiele równań liniowych do drugiego rzędu zawierających zmienne współczynniki (niebędące stałymi).

Rozważmy następujące równanie Bernulliego:

$$\text{In[]:= } \text{eq} = y'[x] + y[x] == a \sin[x] y[x]^2$$

[sinus]

$$\text{Out[]:= } y[x] + y'[x] == a \sin[x] y[x]^2$$

Rozwiązanie ogólne zapisane jest w postaci reguły przekształcenia. Dowolna stała to c_1 .

$$\text{In[]:= } \text{DSolve[eq, y[x], x]}$$

[rozwiązanie równań różniczkowych]

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{2}{2 e^x c_1 + a \cos[x] + a \sin[x]} \right\} \right\}$$

Znajdziemy rozwiązanie dla y w postaci “czystej funkcji”:

$$\text{In[]:= } \text{sol} = \text{DSolve[eq, y, x]}$$

[rozwiązanie równań]

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ y \rightarrow \text{Function}\left[\{x\}, \frac{2}{2 e^x c_1 + a \cos[x] + a \sin[x]} \right] \right\} \right\}$$

Weryfikację można przeprowadzić następująco:

$$\text{In[]:= } \text{eq} /. \text{sol} // \text{Simplify}$$

[uproszcz]

$$\text{Out[]:= } \{ \text{True} \}$$

Przykład 8.4. Zagadnienie Cauchy’ego (lub problem początkowy)

Następnie rozwiązujemy problem początkowy:

$$\text{In[]:= } y[x] /. \text{DSolve}[\{\text{eq}, y[0] == b\}, y[x], x][[1]]$$

[rozwiązanie równań różniczkowych]

$$\text{Out[]:= } -\frac{2 b}{-2 e^x + a b e^x - a b \cos[x] - a b \sin[x]}$$

Następnie podajemy konkretne wartości dla wszystkich stałych:

$$\text{In[]:= } \text{sol1} = y[x] /. \text{DSolve}[\{\text{eq} /. a \rightarrow 1, y[0] == b /. b \rightarrow 2\}, y[x], x][[1]]$$

[rozwiązanie równań różniczkowych]

$$\text{Out[]:= } \frac{2}{\cos[x] + \sin[x]}$$

To rozwiązanie można przedstawić na wykresie, ponieważ nie zawiera żadnych parametrów:

In[]:=

wyk1 = Plot[sol1 // Evaluate, {x, 0, 3 π}, ExclusionsStyle → Red]

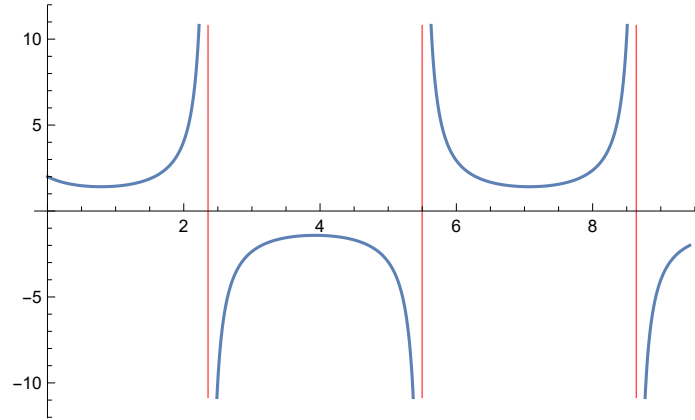
|wykres

|oblicz

|styl wyłączeń

|czerw

Out[]:=



Czerwone pionowe proste to asymptoty.

Przykład 8.5. Rozwiązanie układu równań różniczkowych

Rozwiązujemy układ dwóch równań różniczkowych:

In[]:=

eqs = {x'[t] == a x[t] + b y[t], y'[t] == c x[t] + d y[t];

Znajdźmy rozwiązanie ogólne za pomocą funkcji DSolve.

In[]:=

sol1 = DSolve[eqs, {x[t], y[t]}, t] // Simplify

|rozwiązanie równań różni...|uprosć

Out[]:=

$$\left\{ \left\{ x[t] \rightarrow \left(e^{\frac{1}{2}(a+d-\sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2})t} \left(\sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2} c_1 + \sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2} e^{\sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2}t} c_1 + a(-1 + e^{\sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2}t}) c_1 - d(-1 + e^{\sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2}t}) c_1 - 2bc_2 + 2be^{\sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2}t} c_2 \right) \right) / \right. \right. \\ \left. \left(2\sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2} \right), y[t] \rightarrow \left(e^{\frac{1}{2}(a+d-\sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2})t} \left(2c(-1 + e^{\sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2}t}) c_1 + (a - ae^{\sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2}t} + d(-1 + e^{\sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2}t}) + \sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2}(1 + e^{\sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2}t}) c_2 \right) \right) / \left(2\sqrt{a^2+4bc-2ad+d^2} \right) \right\} \right\}$$

Określmy konkretne wartości współczynników ($a = 1$, $b = -3$, $c = 2$, $d = -2$).

In[]:=

sol2 = sol1 /. {a → 1, b → -3, c → 2, d → -2} // FullSimplify

|uprosć pełniej

$$\text{Out[]} = \left\{ \left\{ x[t] \rightarrow \frac{e^{-t/2} \left(\sqrt{15} c_1 \cos \left[\frac{\sqrt{15} t}{2} \right] + 3(c_1 - 2c_2) \sin \left[\frac{\sqrt{15} t}{2} \right] \right)}{\sqrt{15}}, \right. \right. \\ \left. y[t] \rightarrow \frac{e^{-t/2} \left(\sqrt{15} c_2 \cos \left[\frac{\sqrt{15} t}{2} \right] + (4c_1 - 3c_2) \sin \left[\frac{\sqrt{15} t}{2} \right] \right)}{\sqrt{15}} \right\} \right\}$$

Określmy wartości dowolnych stałych c_1 i c_2 jako następujące zbiory liczb $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $\{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$.

In[]:=

zb1 = Flatten[Table[{sol2[[1, 1, 2]], sol2[[1, 2, 2]]} /. {C[1] → i1, C[2] → i2}, {i1, -2, 2, 1}, {i2, -1, 1, 0.5}], 1] // Simplify;

|splas...|tabela

|stała

|stała

|uprosć

Narysujmy 25 trajektorii fazowych odpowiadających zbiorom wartości stałych c_1 i c_2 przy pomocy funkcji **ParametricPlot**.

In[]:=

wyk2 == ParametricPlot[Evaluate[zb1], {t, 0, 100},

[\[wykres parametryczny\]](#) [\[oblicz\]](#)

PlotRange → {{-3, 3}, {-2, 2}}, **AspectRatio** → 1, **AxesStyle** → Directive[14], **ImageSize** → 350]

[\[zakres wykresu\]](#)

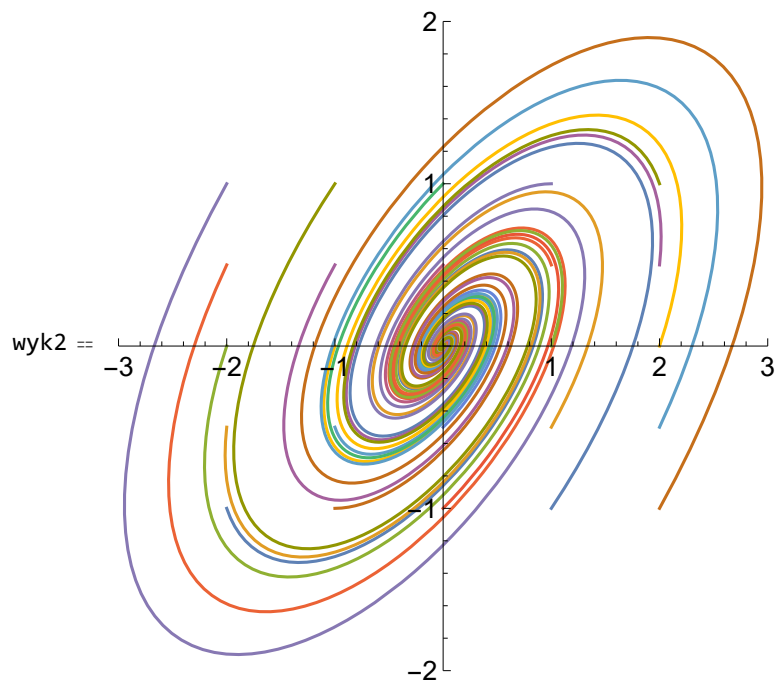
[\[format obrazu\]](#)

[\[styl osi\]](#)

[\[dyrektywa\]](#)

[\[rozmiar obrazu\]](#)

Out[]:=



Z wykresu wynika, że położenie równowagi (0,0) jest ogniskiem stabilnym (w sol2 mamy mnożnik $e^{-t/2}$).

Zadania

Zadanie 1. Znaleźć pochodną:

- $f'(x)$, gdzie $f(x) = e^x \ln x$;
- $f^{(v)}(x)$, gdzie $f(x) = x^2 e^x$;
- $f'_x(x, y)$, gdzie $f(x, y) = x^2 y^3 \cos(x - y)$;
- $f'_y(x, y)$, gdzie $f(x, y) = x^2 y^3 \cos(x + y)$;
- $f'''(x)$, gdzie $f(x) = \frac{2x}{x^2 - y^2}$.

Zadanie 2. Znaleźć granicę:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3 + 5n}$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$.

Zadanie 3. Znaleźć granicę funkcję:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x}$;
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$.

Zadanie 4. Znaleźć sumę $1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots$ w postaci funkcji wymiernej i narysować jej wykres na przedziale $[-2; 4]$.

Zadanie 5. Znaleźć całki:

- a) $\int \frac{\cos x}{x^3} dx$;
- b) $\int x^2 \arccos x dx$;
- c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x + \operatorname{tg} x}{x^2} dx$;
- d) $\int_2^{\infty} \frac{\ln(x^2+2)}{x^4} dx$

Zadanie 6. Znaleźć ogólne lub cząstkowe rozwiązanie (w tym przypadku zrobić wizualizację rozwiązania):

- a) $y'''' - y''' + y' - y = \cos x$;
- b) $y'' - 2y' + y = \ln x$;
- c) $yy'' - 2(y')^2 - y^2 = 0$;
- d) $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
- e) $y' + xy = x^2$, $y(1) = 1$;
- f) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 4x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$;
- g) $y' + z' = 8$, $y'' - 4z = 2$.

Zadanie 7. Znaleźć rozwiązania numeryczne równań i zrobić wizualizację:

- a) $3 \sin x = e^{x^2}$;
 - b) $\operatorname{tg} x = x^3$ (z dokładnością 25 cyfr znaczących).
-