

Ćwiczenie 5. Mathematica: Algebra liniowa. Wielomiany. Rozwiązywanie równań

5.1. Macierze i wektory

Wprowadzimy niektóre podstawowe pojęcia algebry liniowej. *Mathematica* przedstawia wektory i macierze w postaci listy list. Określmy macierz *mat*.

In[]:=

```
mat = {{1, 0, -1}, {2, 4, 6}, {3, 5, 7}};
```

```
MatrixForm[mat]
```

postać macierzy

Out[]:=MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Mathematica zawiera wiele instrukcji mających wykonać główne operacje algebry liniowej (tablica).

DiagonalMatrix[lista]	generuje macierz diagonalną z elementami listy na głównej przekątnej
MatrixForm[A]	zapisuje macierz w postaci zwyczajnej
IdentityMatrix[n]	generuje macierz jednostkową typu $n \times n$
Transpose[A]	transponuje macierz A
Det [wyr]	oblicza wyznacznik macierzy A
Tr[A]	znajdzie ślad macierzy A
Inverse[A]	znajdzie macierz odwrotną do macierzy A
Eigenvalues[A]	wyznacza wartości własne macierzy A
Eigenvectors[A]	wyznacza wektory własne macierzy A
Minors[A]	podaje listę zawierającą wszystkie minory główne macierzy A
Row [wyr ₁ ,wyr ₂]	wiersz z obiektów wyr ₁ , wyr ₂
mat1.mat2	iloczyn macierzy mat1 i mat2

Przykłady Suma i różnica macierzy.

Określmy macierze *matA* i *matB* wymiarów 2×3 . Dla tego stosujemy polecenie **Array**[*a_{###}* &, {*m*, *n*}], które generuje macierz wymiaru $m \times n$ z elementami a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

```
matA = Array[a### &, {2, 3}]
```

tablica wielowymiarowa

```
matB = Array[b### &, {2, 3}]
```

tablica wielowymiarowa

```
{{a1,1, a1,2, a1,3}, {a2,1, a2,2, a2,3}}
```

```
{{b1,1, b1,2, b1,3}, {b2,1, b2,2, b2,3}}
```

Określmy sumy (*matC*) macierzy *matA* i *matB*

```
matC = matA + matB; matC // MatrixForm
```

postać macierzy

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} \end{pmatrix}$$

Określmy różnice macierzy *matA* i *matB*

matD = matA - matB; matD // MatrixForm
 [postać macierz]

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} - b_{1,1} & a_{1,2} - b_{1,2} & a_{1,3} - b_{1,3} \\ a_{2,1} - b_{2,1} & a_{2,2} - b_{2,2} & a_{2,3} - b_{2,3} \end{pmatrix}$$

Określmy iloczyn liczby λ i macierzy matA

mat λ = λ matA; mat // MatrixForm
 [postać macierz]

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \lambda a_{1,3} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \lambda a_{2,3} \end{pmatrix}$$

Widać, że macierze matC, matD i mat λ mają również wymiary 2×3 .

Przykład macierzy diagonalnej

In[]:=
M₄ = DiagonalMatrix[{0, 2, 4, 8}] // MatrixForm
 [macierz diagonalna] [postać macierz]

Out[]:=MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Przykład 5.1.

Określmy wektor wierszowy

In[]:=
M = {40, 60, 80, 100}

Out[]:=
 {40, 60, 80, 100}

Zapiszemy go w postaci wektora kolumnowego

In[]:=
M // MatrixForm
 [postać macierzy]

Out[]:=MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Przykład 5.2.

Oznaczmy macierz A jako macierz matA i macierz B jako macierz matB wymiaru 3×4 i 4×1 odpowiednio

```
In[ ]:=
matA = {{1, 2, 3, 4}, {2, 1, 4, 3}, {-2, -1, 0, 3}};
matA // MatrixForm
      |postać macierzy
matB = {1, -1, 2, -2};
matB // MatrixForm
      |postać macierzy
```

```
Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

```

Znajdziemy iloczyn $A \times B$

```
In[ ]:=
matA.matB // MatrixForm
      |postać macierzy
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

```

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

```

Wymiar otrzymanej macierzy to 3×1 .

Przykład 5.3.

Oznaczmy macierz A jako macierz mat2 i macierz B jako macierz mat3

```
In[ ]:=
mat2 = {{2, 4}, {3, 1}, {-5, 0}};
mat3 = {{-1, 1}, {-2, 3}};
mat2 // MatrixForm
      |postać macierzy
mat3 // MatrixForm
      |postać macierzy
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

```

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

```

Znajdziemy iloczyn A B

```
In[ ]:=
mat2.mat3 // MatrixForm
      |postać macierzy
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

```

$$\begin{pmatrix} -10 & 14 \\ -5 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

```

Przykład 5.4.

Oznaczmy macierz A jako macierz mat4 i macierz B jako macierz mat5

```
mat4 = {{1, 0}, {2, 1}};
```

```
mat5 = {{2, 3}, {1, 2}};
```

Znajdziemy iloczyn $A \times B$ i macierz transportowaną do macierzy $A \times B$

```
mat4.mat5;
```

```
Row[{"A.B=", % // MatrixForm}]
```

└rząd └postać macierzy

```
mat4.mat5 // Transpose;
```

└transpozycja

```
Row[{"(A.B)T=", % // MatrixForm}]
```

└rząd └postać macierzy

Obliczymy macierze A^T , B^T i $B^T \cdot A^T$

```
mat4n = mat4 // Transpose;
```

└transpozycja

```
Row[{"AT=", % // MatrixForm}]
```

└rząd └postać macierzy

```
mat5n = mat5 // Transpose;
```

└transpozycja

```
Row[{"BT=", % // MatrixForm}]
```

└rząd └postać macierzy

```
mat5n.mat4n;
```

```
Row[{"BT.AT=", % // MatrixForm}]
```

└rząd └postać macierzy

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Łatwo zauważyć, że spełnia się równość $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Przykład 5.5.

Macierz A oznaczymy jako macierz mat6

In[]:=

```
mat6 = {{1, -2, 3}, {-1, -8, 4}, {1, 2, 0}};
```

Znajdziemy macierz odwrotną A^{-1}

In[]:=

```
mat6n = mat6 // Inverse;
```

└macierz c

```
mat6n // MatrixForm
```

└postać macierzy

Out[]:=MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 8 \\ 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Sprawdzimy równości $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$

In[]:=

mat6.mat6n // MatrixForm
 ↳postać macier.

mat6.mat6n == mat6n.mat6

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[]:=

True

Przykład 5.6.

Określimy macierz mat8

mat8 = {{1, 3, 0, -1}, {2, 4, -2, 4}, {3, 1, -1, 7}, {-1, 3, 8, 3}};

mat8 // MatrixForm

↳postać macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Znajdziemy wyznacznik macierzy mat8

det = Det[mat8]

↳wyznacznik

- 336

Przykład 5.7.

Macierz A oznaczmy jako macierz mat9

In[]:=

mat9 = {{3, -2, 2}, {-2, 2, -1}, {1, -1, 1}};

Znajdziemy bezpośrednio macierz odwrotną A^{-1}

In[]:=

mat9n = mat9 // Inverse;

↳macierz c

mat9n // MatrixForm

↳postać macierzy

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Teraz obliczymy macierz A^D dołączonej macierzy A

In[]:=

matD =

Table[(-1)^{i+j}, {i, Length[mat9]}, {j, Length[mat9]}] × Map[Reverse, Minors[mat9], {0, 1}] // Transpose // MatrixForm

↳tabela

↳długość

↳długość

↳za...

↳odwróć... ↳minory macierzy

↳transpozycja ↳postać macier.

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Znajdziemy wyznacznik macierzy mat9

In[]:=

Det[mat9]

↳wyznacznik

Out[]:=

1

Skąd macierzą odwrotną A^{-1} jest macierz

In[*]:=

```
mat10 =  $\frac{1}{\text{Det}[\text{mat9}]}$  * matD;
```

```
% // MatrixForm
```

[postać macierzy]

Out[*]:=MatrixForm=

```
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 
```

Macierze mat9n i mat10 są jednakowe.

5.2. Rozwiązanie układów liniowych

Układy równań liniowych zapisanych w postaci

$$a x = b \quad (1)$$

możemy rozwiązać za pomocą instrukcji **LinearSolve**[a,b] i **RowReduce**[a]. Dla rozwiązania układu (1) za pomocą eliminacji Gaussa określimy macierz $\text{mat} = \text{Append}[a^T, b]^T$ i zatem stosujemy polecenie $\text{mat1} = \text{RowReduce}[\text{mat}]$. Rozwiązaniem układu (1) będzie ostatnia kolumna macierzy mat1, którą możemy znaleźć za pomocą polecenia $\text{mat1}[[\text{All}, -1]]$. Np.

```
a = {{1, -1, -3}, {2, 0, -1}, {3, 4, 7}};
```

```
b = {3, 5, 1};
```

```
mat = Append[a // Transpose, b] // Transpose
```

[dołącz na ... [transpozycja [transpozycja]

```
mat1 = RowReduce[mat];
```

[redukcja rzędu macierzy]

```
% // MatrixForm
```

[postać macierzy]

```
mat1[[All, -1]]
```

[wszystko]

```
{ {1, -1, -3, 3}, {2, 0, -1, 5}, {3, 4, 7, 1} }
```

```
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 
```

```
{4, -8, 3}
```

Sprawdźmy to za pomocą instrukcji **Linear Solve**

```
LinearSolve[a, b]
```

[rozwiąż układ równań liniowych]

```
{4, -8, 3}
```

Przykład 5.8.

Oznaczmy pierwszy układ dwóch równań liniowych jako ukł1

In[*]:=

```
ukł1 = {2 x1 - x2 == 1, 8 x1 - 4 x2 == 4}
```

Out[*]=

```
{2 x1 - x2 == 1, 8 x1 - 4 x2 == 4}
```

Znajdziemy rozwiązanie tego układu

In[*]:=

```
Solve[ukł1, {x1, x2}][[1]]
```

[rozwiąż równanie]

Out[*]=

```
{x2 -> -1 + 2 x1}
```

gdzie x_1 jest dowolną liczbą rzeczywistą. Oznaczmy drugi układ dwóch równań liniowych jako ukł2

In[]:=

ukl2 = {2 x₁ + x₂ == 3, 6 x₁ + 3 x₂ == 4}

Out[]:=

{2 x₁ + x₂ == 3, 6 x₁ + 3 x₂ == 4}

Spróbujemy znaleźć rozwiązanie tego układu

In[]:=

Solve[ukl2, {x₁, x₂}][rozwiąż równanie](#)

Out[]:=

{ }

Stąd wynika, że nie istnieje rozwiązanie. Więc, układ ukł2 jest sprzeczny.

Przykład 5.9.

Określamy układ trzech równań jako układ ukł3

In[]:=

ukł3 = {x₁ + 2 x₂ - 2 x₃ == 9, 2 x₁ + x₂ - 2 x₃ == 10, 3 x₁ - 2 x₂ + 4 x₃ == 1};

Zapiszemy go w postaci macierzowej

In[]:=

matA = {{1, 2, -2}, {2, 1, -2}, {3, -2, 4}};**wiektX = {x₁, x₂, x₃};****wiektB = {9, 10, 1};**

In[]:=

Row[{"A=", matA // MatrixForm, ",", "X=", wiektX // MatrixForm, ",", "B=", wiektB // MatrixForm}][rzęd](#)[postać macierzy](#)[postać macierzy](#)[postać macierzy](#)

Out[]:=

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zapiszemy ten układ w postaci zwyczajnej

In[]:=

ukł = matA.wiektX == wiektB

Out[]:=

{x₁ + 2 x₂ - 2 x₃, 2 x₁ + x₂ - 2 x₃, 3 x₁ - 2 x₂ + 4 x₃} == {9, 10, 1}

Obliczamy wyznacznik macierzy A

In[]:=

Det[matA][wyznacznik](#)

Out[]:=

- 14

skąd wynika, że macierz A jest nieosobliwa. Znajdujemy macierz odwrotną

In[]:=

matA1 = matA // Inverse;[macierz c](#)**% // MatrixForm**[postać macierzy](#)

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 1 & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

Rozwiązaniem układu **ukł** jest wektor

In[]:=

sol = wiektX == matA1.wiektB

Out[]:=

$\{x_1, x_2, x_3\} == \{3, 2, -1\}$

Stąd wynika

In[]:=

Thread[sol]

[nawlecz](#)

Out[]:=

$\{x_1 == 3, x_2 == 2, x_3 == -1\}$

Sprawdzimy tę odpowiedź

In[]:=

wiektB == ukl[[1]] /. Table[sol[[1, i]] → sol[[2, i]], {i, 1, 3}]

[tabela](#)

Out[]:=

True

Znajdziemy rozwiązanie w sposób inny

In[]:=

rozw = LinearSolve[matA, wiektB]

[rozwiąż układ równań liniowych](#)

Out[]:=

$\{3, 2, -1\}$

Przykład 5.10.

Oznaczmy macierz A jako macierz mat1 i wektor B jako wekt1

In[]:=

mat1 = {{1, 0, -1}, {3, 4, -2}, {3, 3, -2}};

wekt1 = {1, -1, 1};

mat1 // MatrixForm

[postać macierzy](#)

wekt1 // MatrixForm

[postać macierzy](#)

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obliczamy wyznacznik macierzy mat1

In[]:=

Det[mat1]

[wyznacznik](#)

Out[]:=

1

Określimy macierz A_1 jako matA₁ i obliczymy jej wyznacznik

```
In[ ]:=
matA1 = Table[{wekt1[[i]], mat1[[i, 2]], mat1[[i, 3]]}, {i, 1, 3}];
      |tabela
```

```
% // MatrixForm
      |postać macierzy
```

```
Det[matA1]
      |wyznacznik
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
      ( 1  0 -1 )
      (-1 4 -2 )
      ( 1  3 -2 )
```

```
Out[ ]:=
5
```

W sposób analogiczny obliczamy wartości wyznaczników macierzy A_2 i A_3

```
In[ ]:=
matA2 = Table[{mat1[[i, 1]], wekt1[[i]], mat1[[i, 3]]}, {i, 1, 3}];
      |tabela
```

```
% // MatrixForm
      |postać macierzy
```

```
Det[matA2]
      |wyznacznik
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
      ( 1  1 -1 )
      ( 3 -1 -2 )
      ( 3  1 -2 )
```

```
Out[ ]:=
-2
```

```
In[ ]:=
matA3 = Table[{mat1[[i, 1]], mat1[[i, 2]], wekt1[[i]]}, {i, 1, 3}];
      |tabela
```

```
% // MatrixForm
      |postać macierzy
```

```
Det[matA3]
      |wyznacznik
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
      ( 1  0  1 )
      ( 3  4 -1 )
      ( 3  3  1 )
```

```
Out[ ]:=
4
```

Wtedy ze względu na wzory Kramera otrzymujemy rozwiązanie układu

```
In[ ]:=
Table[xi == Det[matAi] / Det[mat1], {i, 1, 3}] // TraditionalForm
      |tabela                                     |tradycyjna forma
```

```
Out[ ]//TraditionalForm=
{x1 = 5, x2 = -2, x3 = 4}
```

Przykład 5.11.

Oznaczmy macierz A jako mat2

In[]:=

mat2 = {{2, 5, 1}, {3, 0, -6}, {-1, 4, 6}, {1, 2, 0}};**mat2 // MatrixForm**

[postać macierzy]

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Określmy po kolei wartości minorów stopnia trzeciego, wyjętych z macierzy A

Minors[mat2, 3]

[minory macierzy]

{{{0}}, {{0}}, {{0}}, {{0}}}

Znajdziemy rząd macierzy A

MatrixRank[mat2]

[rzęd macierzy]

2

Stąd, $\text{rz } A = 2$.

Przykład 5.12.

Oznaczmy macierz A jako macierz mat3 i wektor B jako wekt1

In[]:=

mat3 = {{1, 5, -1}, {-1, -4, -3}, {3, 14, 0}, {2, 8, 6}};**wiekt1 = {0, 1, 4, -2};**

Zapiszemy macierz rozszerzoną $[A \mid B]$

In[]:=

MatrixForm[mat4 = Transpose[Join[Transpose[mat3], {wiekt1}]]]

[postać macierzy]

[transpozy· [po· [transpozycja]

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & 1 \\ 3 & 14 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Przekształcimy je do postaci trójkątnej

In[]:=

RowReduce[mat4] // MatrixForm

[redukcja rzędu maci· [postać macierzy]

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Znajdziemy rząd macierzy mat3 i mat4

In[]:=

MatrixRank[mat3]

[rzęd macierzy]

MatrixRank[mat4]

[rzęd macierzy]

Out[]:=

3

Out[]:=

3

Są one równe. Znajdujemy teraz rozwiązanie za pomocą instrukcji **LinearSolve**

```
In[ ]:=  
{x1, x2, x3} == LinearSolve[mat3, wiekt1];  
[rozwiąż układ równań liniowych]
```

```
Thread[%] // TraditionalForm  
[nawlecz [tradycyjna forma]
```

```
Out[ ] // TraditionalForm=  
{x1 = 90, x2 = -19, x3 = -5}
```

Przykład 5.13.

ukl4 = {x₁ + 2 x₂ + 3 x₃ - x₄ == -1, 3 x₁ + 6 x₂ + 7 x₃ + x₄ == 5, 2 x₁ + 4 x₂ + 7 x₃ - 4 x₄ == -6};

Określimy macierz A układu ukl4 jako macierz mat5 i macierz $[A | B]$ jako mat6, gdzie $B = \text{wekt2}$ – wektor wyrazów wolnych

mat5 = {{1, 2, 3, -1}, {3, 6, 7, 1}, {2, 4, 7, -4}};

wekt2 = {-1, 5, -6};

MatrixForm[mat6 = Transpose[Join[Transpose[mat5], {wekt2}]]]

[postać macierzy [transpozy· [po· [transpozycja]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Znajdziemy rząd macierzy mat5 i mat6

```
mat5 // MatrixRank  
[rząd macierzy]
```

```
mat6 // MatrixRank  
[rząd macierzy]
```

2

2

Są one równe i mniejsze niż 4. Wtedy układ równań ukl4 ma nieskończenie wiele rozwiązań

Solve[ukl4, {x1, x3}][[1]] /. Rule -> Equal // TraditionalForm

[rozwiąż równanie [reguła [równe [tradycyjna forma]

{x₁ = -2 x₂ - 5 x₄ + 11, x₃ = 2 x₄ - 4}

gdzie x₂ i x₄ są liczbami rzeczywistymi dowolnymi.

Przykład 5.14.

Zapiszemy układ równań liniowych w postaci ukl5

ukl5 = {x₁ - x₂ - 2 x₃ + 2 x₄ == -2, 5 x₁ - 3 x₂ - x₃ + x₄ == 3, 2 x₁ + x₂ - x₃ + x₄ == 1, 3 x₁ - 2 x₂ + 2 x₃ - 2 x₄ == -4};

Określimy macierz A układu ukl5 jako macierz mat5 i macierz $[A | B]$ jako mat6, gdzie $B = \text{wekt3}$ – wektor wyrazów wolnych

mat7 = {{1, -1, -2, 2}, {5, -3, -1, 1}, {2, 1, -1, 1}, {3, -2, 2, -2}};

wekt3 = {-2, 3, 1, -4};

MatrixForm[mat8 = Transpose[Join[Transpose[mat7], {wekt3}]]]

[postać macierzy [transpozy· [po· [transpozycja]

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Znajdziemy rząd macierzy mat7 i mat8

```
mat7 // MatrixRank  
[rząd macierzy]
```

```
mat8 // MatrixRank  
[rząd macierzy]
```

3

4

Ponieważ rzędy macierzy są różne, to układ równań ukł5 jest sprzeczny. Pokażemy to również za pomocą instrukcji Solve

Solve[ukł5, {x₁, x₂, x₃, x₄}]

[\[rozwiąż równanie\]](#)

{ }

Wielomiany. Rozwiązywanie równań.

Do wyznaczania rozwiązań analitycznych równań stosujemy funkcję **Solve**.

Solve[eqn] Rozwiązuje równanie eqn względem symbolu występującego w tym równaniu

Solve[eqn, x] Rozwiązuje równanie eqn względem zmiennej x

Jeśli równanie zawiera tylko jeden symbol, nie trzeba go wymieniać w poleceniu.

In[]:= eqn = x³ + 2 a x² + x == 0;

sol = Solve[eqn, x]

[\[rozwiąż równanie\]](#)

Out[]:= $\left\{ \{x \rightarrow 0\}, \left\{ x \rightarrow -a - \sqrt{-1 + a^2} \right\}, \left\{ x \rightarrow -a + \sqrt{-1 + a^2} \right\} \right\}$

Rozwiązania zapisane są w postaci reguł przekształceń. Ich weryfikację można przeprowadzić następująco:

In[]:= eqn /. sol // Simplify

[\[uprość\]](#)

Out[]:= { True, True, True }

Jeśli chcesz uzyskać listę wartości (a nie listę reguł), wpisz następujące polecenie:

In[]:= x /. sol

Out[]:= $\left\{ 0, -a - \sqrt{-1 + a^2}, -a + \sqrt{-1 + a^2} \right\}$

Należy jednak zauważyć, że reguły transformacji są przydatne, ponieważ można je łatwo wykorzystać do obliczenia wartości dowolnego wyrażenia:

In[]:= x + a /. sol

Out[]:= $\left\{ a, -\sqrt{-1 + a^2}, \sqrt{-1 + a^2} \right\}$

Solve potrafi rozwiązywać wszystkie wielomiany do czwartego stopnia włącznie. Wielomiany piątego stopnia i wyższych stopni również mogą być czasami rozwiązane:

In[]:= w = -16 - 12 x + 16 x² + 5 x³ - 6 x⁴ + x⁵;

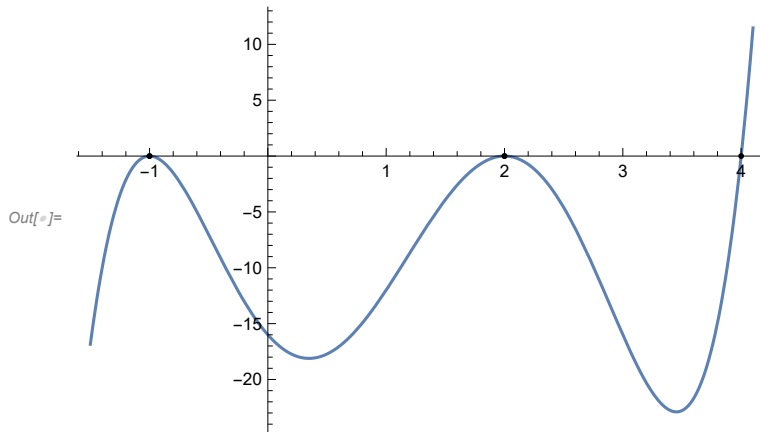
sol = Solve[w == 0]

[\[rozwiąż równanie\]](#)

Out[]:= $\left\{ \{x \rightarrow -1\}, \{x \rightarrow -1\}, \{x \rightarrow 2\}, \{x \rightarrow 2\}, \{x \rightarrow 4\} \right\}$

```
In[ ]:= Plot[w, {x, -1.5, 4.1}, Epilog -> Point[{x, 0} /. sol]]
```

[wykres](#) [dopraco...](#) [punkt](#)



Często jednak zdarza się, że takie równania wyższego rzędu nie dają się rozwiązać dokładnie:

```
In[ ]:= sol = Solve[x^5 + 2 x - 1 == 0]
```

[rozwiąż równanie](#)

```
Out[ ]:= {{x -> 0.486...}, {x -> -0.945... - 0.855... i}, {x -> -0.945... + 0.855... i},
          {x -> 0.702... - 0.880... i}, {x -> 0.702... + 0.880... i}}
```

Funkcja **Solve** zwraca symboliczne przedstawienie rozwiązania za pomocą obiektu **Root**. **Root[w, k]** reprezentuje k-ty pierwiastek równania $w(x) = 0$.

Można jednak uzyskać wyniki numeryczne dla pierwiastków:

```
In[ ]:= sol // N
```

[przybliżenie numeryczne](#)

```
Out[ ]:= {{x -> 0.486389}, {x -> -0.945068 - 0.854518 i}, {x -> -0.945068 + 0.854518 i},
          {x -> 0.701874 - 0.879697 i}, {x -> 0.701874 + 0.879697 i}}
```

Rozwiązanie numeryczne

NSolve[eqn, x] Rozwiązuję równanie **eqn** numerycznie dla x

NSolve[eqn, x, n] Rozwiązuję równanie **eqn** numerycznie dla x, stosując w obliczeniach precyzję n cyfr po przecinku.

```
In[ ]:= w = x^5 + x - 3;
sol = NSolve[w == 0, x]
```

[rozwiąż numerycznie](#)

```
Out[ ]:= {{x -> -1.04188 - 0.82287 i}, {x -> -1.04188 + 0.82287 i},
          {x -> 0.475381 - 1.1297 i}, {x -> 0.475381 + 1.1297 i}, {x -> 1.133}}
```

Rozwiązanie nie spełnia warunku $p = 0$ w punktach będących pierwiastkami. Piąty pierwiastek, będący liczbą rzeczywistą, spełnia warunek (zwraca True):

```
In[ ]:= w == 0 /. sol
```

```
Out[ ]:= {False, False, False, False, True}
```

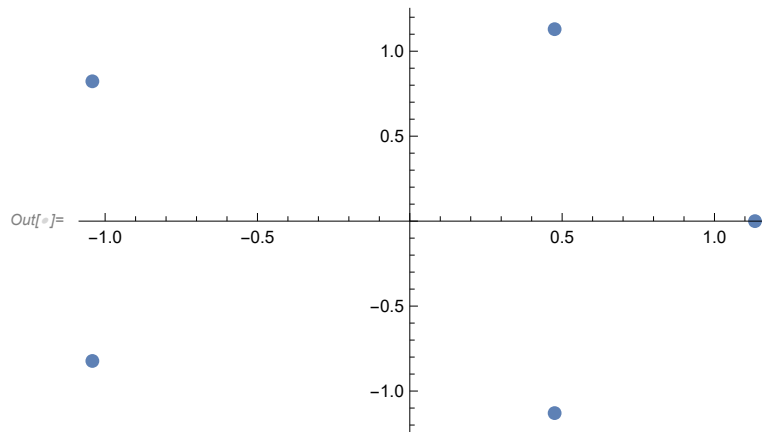
To typowe dla rozwiązań numerycznych. Sprawdzając wartość wielomianu w obliczonych pierwiastkach, widzimy ich wysoką dokładność:

In[]:= **w /. sol**

Out[]:= $\{1.77636 \times 10^{-15} + 3.33067 \times 10^{-16} i, 1.77636 \times 10^{-15} - 3.33067 \times 10^{-16} i, 0. + 6.66134 \times 10^{-16} i, 0. - 6.66134 \times 10^{-16} i, 0.\}$

Oto wykres rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej:

In[]:= **ListPlot[{Re[x], Im[x]} /. sol, PlotStyle -> PointSize[0.02]]**
[wykres danych](#) [część rzeczywista](#) [część urojona](#) [styl grafiki](#) [rozmiar kropki](#)



Kilka równań wielomianowych

Solve[eqns, vars] Rozwiązuję układ równań eqns względem zmiennych vars

NSolve[eqns, vars] Rozwiązuję układ równań eqns numerycznie względem zmiennych vars

W poniższym przykładzie otrzymujemy dwa rozwiązania:

In[]:= **Solve[{x² - y² == 24, 2 x + y == 9}, {x, y}]**
[rozwiąż równanie](#)

Out[]:= $\{\{x \rightarrow 5, y \rightarrow -1\}, \{x \rightarrow 7, y \rightarrow -5\}\}$

Poniższy układ równań ma cztery rozwiązania:

In[]:= **sys = {x³ - y² + x y == 1, x² + y == 4};**
sol = NSolve[sys, {x, y}]
[rozwiąż numerycznie](#)

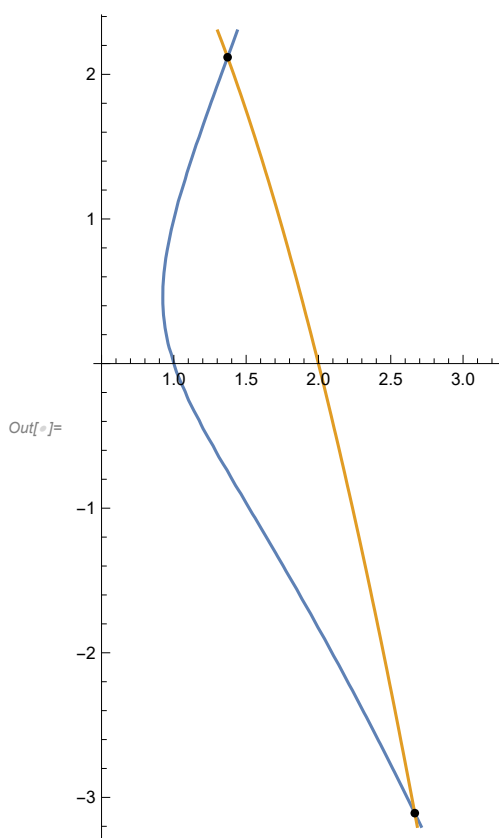
Out[]:= $\{\{x \rightarrow -2.019 - 0.756087 i, y \rightarrow 0.495294 - 3.05309 i\},$
 $\{x \rightarrow -2.019 + 0.756087 i, y \rightarrow 0.495294 + 3.05309 i\},$
 $\{x \rightarrow 1.37176, y \rightarrow 2.11827\}, \{x \rightarrow 2.66624, y \rightarrow -3.10885\}\}$

Ilustrujemy rozwiązania rzeczywiste

```

In[ ]:= ContourPlot[sys // Evaluate, {x, .5, 3.2}, {y, -3.2, 2.3}, Frame → False, Axes → True,
  wykres konturowy oblicz ramka fałsz osie prawda
  AspectRatio → Automatic, Epilog → {PointSize[Medium], Point[{x, y} /. {sol[[3]], sol[[4]]}]}]
  format obrazu automatyczny dopracowa rozmiar kro średnia w punkt

```



Równania transcendentalne

Jeśli równanie lub nierówność przestępna jest wystarczająco proste, funkcje **Solve** lub **Reduce** mogą znaleźć rozwiązanie. W większości sytuacji musimy jednak uciec się do metod iteracyjnych dostarczanych przez **FindRoot**.

Solve[eqns, vars] spróbuje znaleźć pełne rozwiązanie podanych równań.

Reduce[eqn, vars, dom] spróbuje znaleźć pełne rozwiązanie podanych równań i nierówności przestępnych.

Na przykład, spróbujmy najpierw rozwiązać to zadanie za pomocą funkcji **Solve**:

```

In[ ]:= Solve[-Sin[2 x] == Cos[x], x]
  rozwiąż sinus cosinus

```

Out[]:= $\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{5\pi}{6} + 2\pi c_1 \text{ if } c_1 \in \mathbb{Z} \right\}, \left\{ x \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi c_1 \text{ if } c_1 \in \mathbb{Z} \right\} \right\},$
 $\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{\pi}{6} + 2\pi c_1 \text{ if } c_1 \in \mathbb{Z} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2\pi c_1 \text{ if } c_1 \in \mathbb{Z} \right\} \right\}$

In[]:= **Reduce**[-**Sin**[2 x] == **Cos**[x], x]
 [zredukuj] [sinus] [cosinus]

$$\text{Out[]}= c_1 \in \mathbb{Z} \&\& \left(x == -\frac{\pi}{2} + 2\pi c_1 \mid \mid x == \frac{\pi}{2} + 2\pi c_1 \mid \mid x == -\frac{5\pi}{6} + 2\pi c_1 \mid \mid x == -\frac{\pi}{6} + 2\pi c_1 \right)$$

In[]:= % // **FullSimplify**
 [uproszcz pełniej]

$$\text{Out[]}= c_1 \in \mathbb{Z} \&\& \left(\pi + 2x == 4\pi c_1 \mid \mid \pi + 4\pi c_1 == 2x \mid \mid x == \pi \left(-\frac{5}{6} + 2c_1 \right) \mid \mid \pi + 6x == 12\pi c_1 \right)$$

Zadania

Zadanie 1. Obliczyć sumę i różnicę macierzy $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Zadanie 2. Obliczyć iloczyn macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. Dla macierzy A obliczyć wyznacznik, macierz odwrotną oraz A^3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4. Dla macierzy B obliczyć minorze i wartości własne:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 5. Użyj polecenia **Table**, aby wprowadzić macierz z liczbami całkowitymi od 1 do 5 na przekątnej, 0 poniżej przekątnej i 1 powyżej przekątnej.

Zadanie 6. Przekształcić macierz B do formy trójkątnej:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 7. Rozwiązać układy równań liniowych:

- a) $5x - 7y + z = 12$, $2x + 3y - 4z = -1$, $9x - y - 5z = 10$;
- b) $5x - 7y + z = 12$, $10x - 14y + 2z = 1$, $x + y - 5z = 4$;
- c) $5x - 7y + z = 12$, $15x - 21y + 3z = 36$, $x + y - 5z = 4$.

Zadanie 8. Rozwiązać równanie macierzowe $Ax = b$ za pomocą **LinearSolve**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Sprawdź rozwiązanie.}$$

Zadanie 9. Znaleźć rzeczywiste pierwiastki wielomianu $w(x) = 18 - 27x + 11x^2 - 3x^3 + x^4$.

Zadanie 10. Rozwiązać układy równań:

a) $5x - 6z + 1 = 0$, $-5 - 3x^2 + 5y^2 - 7z^2 = 0$, $8 + 7y^2 + 9z - 9z^3 = 0$;

b) $\sin(x - y) = 1$, $\cos(x + y) = -1/2$.

Zadanie 11. Znaleźć przybliżone wartości trzech rozwiązań równania $2 \sin x = e^{-x^2}$ z dokładnością 10 cyfr znaczących.
