Wykład 5

Metoda eliminacji Gaussa

Rozwiązywanie układów równań liniowych

Układ równań liniowych może mieć dokładnie jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiązań lub nie mieć rozwiązania.

Metody dokładne rozwiązywania układów równań prowadzą do dokładnego rozwiązania, jeżeli wszystkie obliczenia wykonywane są bez zaokrągleń.

Jedną z tego typu metod jest metoda korzystająca ze wzorów Cramera.

Wymaga ona znajomości algorytmu wyznaczania wyznaczników i dla większej liczby równań jest nieefektywna. Liczba działań arytmetycznych wzrasta bardzo szybko wraz ze wzrostem stopnia wyznacznika. Dlatego też już nawet dla układów niskiego stopnia wzory Cramera są nieprzydatne.

W związku z tym opracowano bardziej skuteczne metody. Spośród metod skończonych najpopularniejszą jest metoda eliminacji Gaussa.

Jeżeli natomiast macierz układu jest symetryczna i dodatnio określona, godną polecenia jest metoda Choleskiego.

Dla układów źle uwarunkowanych stosuje się metodę ortogonalizacji Householdera.

Zagadnienia:

- rozwiązywanie układów równań
- obliczanie wyznaczników
- obliczanie rzędu macierzy
- odwracanie macierzy

Układy równań – podstawowe pojęcia

Niech dany będzie układ równań postaci

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=b_n \end{aligned} \qquad (5.1)$$

gdzie a_{ij}, $b_{ij} \in R$ są danymi współczynnikami tego układu, natomiast wartości $x_1,\ldots,x_n \in R$ są szukanym rozwiązaniem.

Oznaczmy teraz

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in R^{nxn} \qquad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in R^{nx1} \qquad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^{nx1}$$

Powyższy układ równań liniowych z n niewiadomymi można zapisać w postaci macierzowej

$$A\ x=b$$

Macierz A nazywamy **macierzą układu** (4.1), wektor x **rozwiązaniem**, natomiast wektor b **wektorem wyrazów wolnych**. Macierz

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

nazywa się **macierzą uzupełnioną** układu (5.1).

Wiadomo, że układ ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$.

Najprostszą metodą rozwiązywania układów równań i jednocześnie użyteczną w obliczeniach na komputerze jest metoda eliminacji Gaussa.

Metoda eliminacji Gaussa

Metoda ta jest stosowana dla układów równań spełniających założenia

$$\det\left[a_{11}\right]\neq 0,\quad \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\neq 0,\quad \ldots,\quad \det\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}\neq 0.$$

tzn. gdy wszystkie minory główne są różne od zera. Jest to **warunek konieczny i dostateczny** istnienia rozwiązania.

Warunek dostateczny: *Jeżeli macierz A jest macierzą z dominującą główną przekątną, to metoda eliminacji Gaussa może być stosowana bez wyboru elementów podstawowych.*

U podstaw metody eliminacji Gaussa leży metoda rozwiązywania układów równań liniowych polegająca na eliminowaniu kolejnych zmiennych. Do tego celu używa się przekształceń elementarnych polegających na:

1. odejmowaniu od wierszy macierzy uzupełnionej innych wierszy pomnożonych przez odpowiednie stałe,
2. mnożeniu wierszy macierzy uzupełnionej przez stałe.

Podstawowa metoda eliminacji Gausa składa się z dwóch etapów:

- przekształcenia macierzy pierwotnej $\left[\, A \middle| b \,\right]$ do postaci trójkątnej górnej, jest to tzw. **postępowanie proste Gaussa**
- rozwiązania trójkątnego układu równań stosując tzw. **postępowanie odwrotne Gaussa**.

Oznaczamy elementy macierzy $A=\left[a_{ij}\right]_{i,\,j=1,\,2,\ldots,\,n}$ jako $a_{ij}=a_{ij}^{(0)}$, a elementy wektora b jako $b_i=a_{i,\,n+1}^{(0)}$, $i=1,\,2,\ldots,n$. Indeks $^{(0)}$ oznacza zerowy próg eliminacji Gaussa. Zatem

$$[A|b]=A^{(0)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} & a_{2n+1}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} & a_{nn+1}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Elementy macierzy dla kolejnych kroków oznaczane będą indeksem górnym $^{(k)}$, natomiast macierz po *k*-tym kroku $A^{(k)}$

Postępowanie proste Gaussa

Niech $a_{11}^{(0)} \neq 0$. W pierwszym kroku eliminacji Gaussa chcemy wyzerować elementy *1*-szej kolumny poniżej przekątnej. W tym celu od *i*-tego wiersza $i=2, 3, \ldots, n$ macierzy $A^{(0)}$ odejmujemy pierwszy wiersz tej macierzy

pomnożony przez $r = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \cdot a_{1j}^{(0)}, \quad i=2, 3, \ldots, n, \quad j=1,2,\ldots,n+1 .$$

Stąd w szczególności dla $j=1$

$$a_{i1}^{(1)} = a_{i1}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}\, a_{11}^{(0)} = a_{i1}^{(0)} - a_{i1}^{(0)} = 0\,, \quad i=2,\,3,\ldots,\,n$$

tzn. macierz $A^{(0)}$ została przekształcona do postaci

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{nn+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

k-ty krok eliminacji Gaussa

Mając w (k-1)-szym kroku macierz

$$A^{(k-1)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & \cdots & a_{1\,k-1}^{(k-1)} & a_{1\,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{1\;n+1}^{(k-1)} \\ 0 & \cdots & a_{2\,k-1}^{(k-1)} & a_{2\,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{2\,n+1}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{k-1,\,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,\,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1\;n+1}^{(k-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k,\,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k\;n+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n\,k}^{(k)} & \cdots & a_{n\;n+1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

przy założeniu, że $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ w k-tym kroku zerujemy k-tą kolumnę pod przekątną odejmując od i-tego wiersza powyższej macierzy wiersz k-ty pomnożony przez $\dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$,

$i = k+1,\, k+2, \ldots, n$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\, a_{kj}^{(k-1)} \qquad j = 1,\, 2, \ldots, n+1$$

W szczególności dla $j=k$

$$a_{ik}^{(k)} = a_{ik}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\, a_{kk}^{(k-1)} = 0$$

Macierz $A^{(k-1)}$ zostanie więc przekształcona do postaci

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & \cdots & a_{1k}^{(k)} & a_{1k+1}^{(k)} & \cdots & a_{1,n+1}^{(k)} \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & & a_{kk}^{(k)} & a_{kk+1}^{(k)} & \cdots & a_{k,n+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{n,n+1}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k=1,\, 2,\ldots,n-1$$

Reasumując, powyższe postępowanie, zwane postępowaniem prostym Gaussa, można zapisać w postaci:

```
for(int k=1; k<n; k++) //kolumny do zerowania
{  //zerowanie k -tej kolumny poniżej przekatnej w dół
   for (int i=k+1; i<=n; i++)
   {
     r = a[i][k]/a[k][k];  // a[k][k]<>0
     a[i][k] = 0; //nie trzeba obliczać, wystarczy wyzerować
     for (j=k+1; j<=n+1; j++) //i-ty wiersz - k-ty * r
          a[i][j] = a[i][j] - r*a[k][j];
   }

}
```

Postępowanie odwrotne Gaussa

W drugim etapie należy rozwiązać górnie trójkątny układ równań:

$$a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(n-1)}x_n = a_{1,n+1}^{(n-1)}$$

$$a_{22}^{(n-1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(n-1)}x_n = a_{2,n+1}^{(n-1)}$$

$$\ldots$$

$$a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = a_{n-1,n+1}^{(n-1)}$$

$$a_{nn}^{(n-1)}x_n = a_{n,n+1}^{(n-1)}$$

Rozwiązanie tego układu sprowadza się do następujących równości. Zaczynamy od końca. Mamy:

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

A następnie obliczamy kolejne x_i ze wzorów rekurencyjnych:

$$x_i = \left(a_{i,n+1}^{(n-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n-1)} x_j \right) / a_{ii}^{(n-1)}, \quad i = n-1,\, n-2\, ,\ldots, 1$$

```
x[n] = A[n][n+1] / A[n][n];   // a[n][n]<>0
for (int i = n-1; i>0; i--)
{
 double suma=0.0;
 for (int j=i+1; j<=n; j++)
     suma += A[i][j] * x[j];
 x[i]=(A[i][n+1]-suma)/A[i][i]; // a[i][i]<>0
}
```

Zastosowanie eliminacji Gaussa

1. Obliczanie wyznaczników

$$\det A = a_{11}^{(n-1)} \cdot a_{22}^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)}$$

Przekształcanie elementarne dopuszczalne w postępowaniu prostym Gaussa nie zmieniają wartości wyznacznika. Jeżeli przestawilibyśmy wiersze lub kolumny, to należy jednocześnie zmienić znak wyznacznika:

$$\det A = a_{11}^{(n-1)} \cdot a_{22}^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)} (-1)^{l.p.wierszy + l.p.kolumn}$$

Przykład 1. Rozwiązać układ równań $Ax=b$ dla danych:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Tworzymy macierz uzupełnioną:

$$A^{(0)}=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Krok *1*-szy – zerowanie *1*-szej kolumny

Od wierszy od 2-go do 4-tego odejmujemy pierwszy wiersz

pomnożony przez czynnik $r = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$ *i =2,3,4.*

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$w_2 \leftarrow w_2 - \frac{1}{2} \cdot w_1$$

$$w_3 \leftarrow w_3 - \frac{0}{2} \cdot w_1$$

$$w_4 \leftarrow w_4 - \frac{2}{2} \cdot w_1$$

Krok ***2*** – zerowanie *2*-giej kolumny poniżej przekątnej poprzez odejmowanie drugiego wiersza pomnożonego przez

$$r = \frac{a_{i2}^{(0)}}{a_{22}^{(0)}}$$ od wiersza $i=3,4$

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -0.5 & 2 \end{array}\right]$$

$$w_3 \leftarrow w_3 - \frac{1}{-2} \cdot w_2$$

$$w_4 \leftarrow w_4 - \frac{-3}{-2} \cdot w_2$$

Krok ***3*** – zerowanie *3*-ciej kolumny poniżej przekątnej poprzez odejmowanie od wiersza *4-tego* wiersza trzeciego

pomnożonego przez $r=\frac{a_{i3}^{(0)}}{a_{33}^{(0)}}$

$$A^{(3)}=\left[\begin{array}{cccr|c} 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 2 \end{array}\right] \quad w_4 \leftarrow w_4-\frac{3}{2}\cdot w_3$$

W ten sposób doszliśmy do układu górnie trójkątnego. **Postępowanie odwrotne Gaussa**: Rozwiązując powyższy układ od końca otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+2x_3=4 \\ -2x_2-2x_3+x_4=0 \\ 2x_3-\frac{1}{2}x_4=0 \\ \frac{1}{4}x_4=2 \end{cases}$$ postępowanie odwrotne -> $$\begin{cases} x_1=-4 \\ x_2=2 \\ x_3=2 \\ x_4=8 \end{cases}$$

Odwracanie macierzy

Jeśli macierz $A=[a_{ij}]_{nxn}$ jest nieosobliwa, $\det A \neq 0$, to istnieje macierz $X=[x_{ij}]_{nxn}$, taka że $AX=XA=I$.

Macierz X oznaczamy A^{-1} i nazywamy macierzą odwrotną.

Bezpośrednio z definicji wynika, że macierz odwrotna jest rozwiązaniem macierzowego układu równań $AX=I$.

Jej wyznaczenie można przeprowadzić przy pomocy metody

eliminacji Gaussa zastosowanej do macierzy uzupełnionej

postaci $[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$.

Zadania

1) Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \end{array}\right]$$

2) Korzystając z eliminacji Gaussa bez wyboru elementów podstawowych wyznacz macierz odwrotną do macierzy

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

3) Sprowadź macierz A do postaci górnie trójkątnej:

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -1 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$