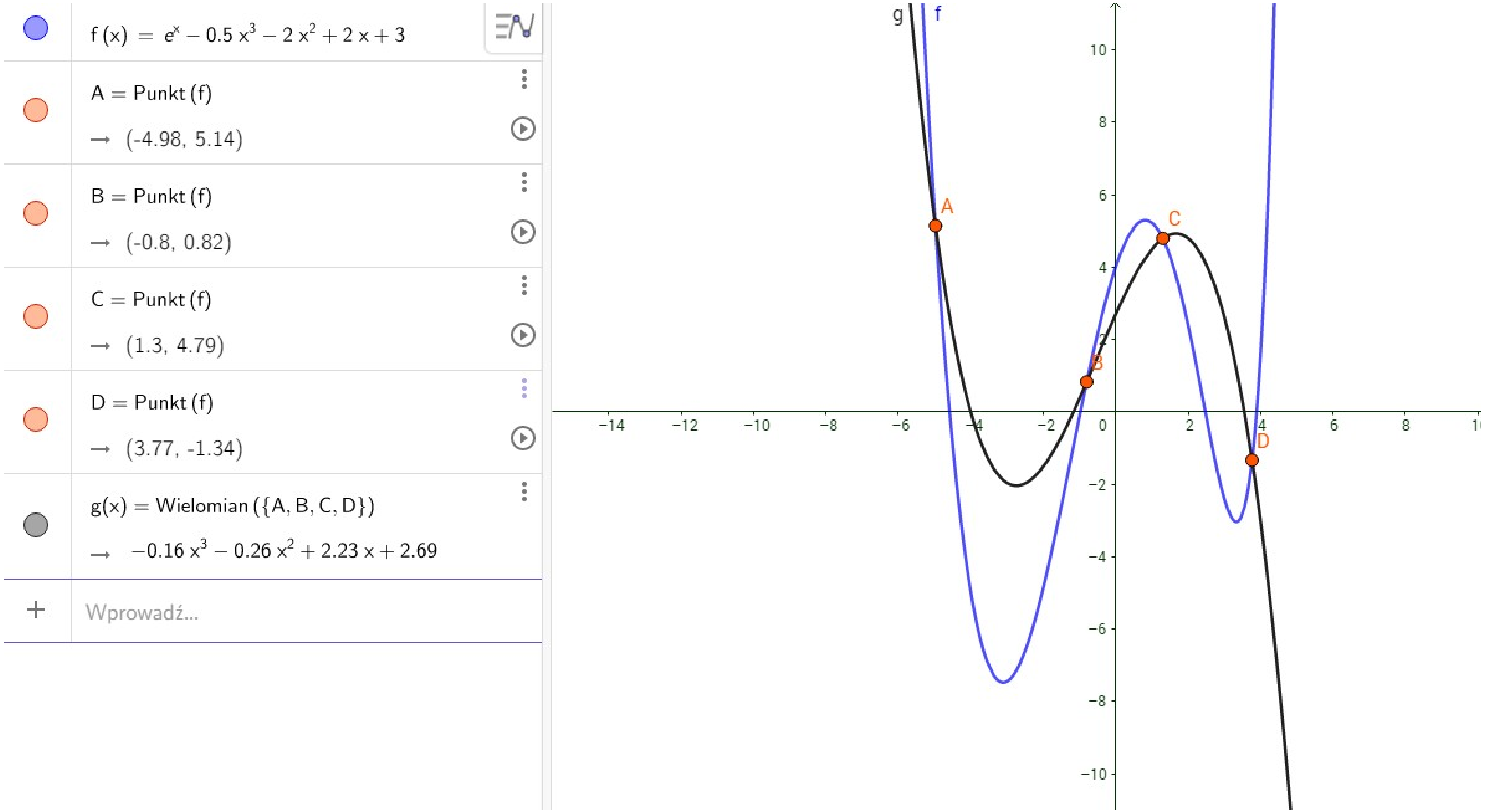
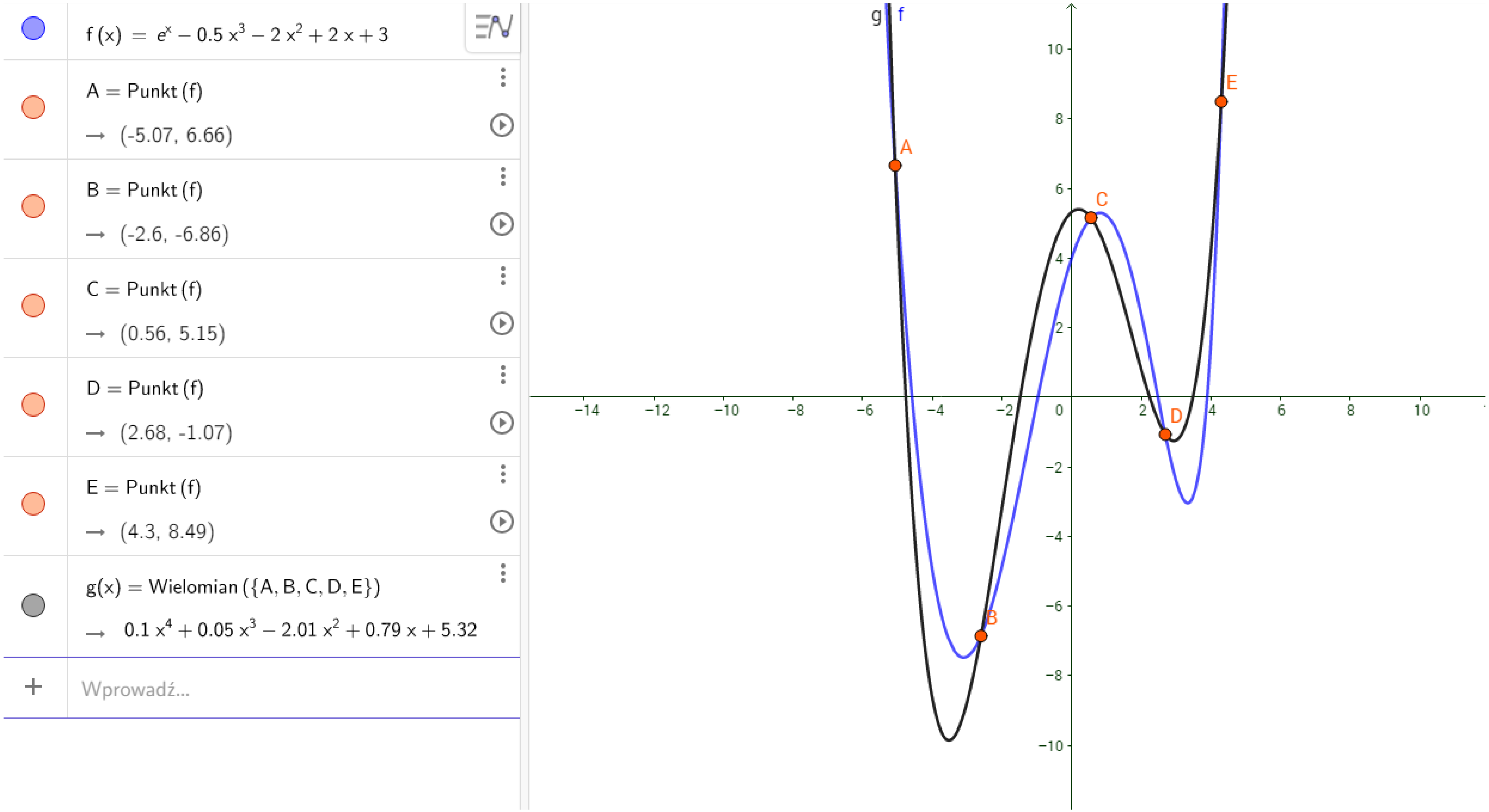
Interpolacja wielomianowa

Wzór interpolacyjny Lagrange'a.

2. Interpolacja wielomianowa

Interpolacja wielomianowa umożliwia wyznaczanie wzorów przybliżonych stosowanych do obliczania wartości funkcji w dowolnym punkcie, przy założeniu, że znane są wartości tej funkcji w skończonej liczbie punktów.


f(x) = e^x − 0.5 x^3 − 2 x^2 + 2 x + 3
A = Punkt(f)
→ (-4.98, 5.14)
B = Punkt(f)
→ (-0.8, 0.82)
C = Punkt(f)
→ (1.3, 4.79)
D = Punkt(f)
→ (3.77, -1.34)
g(x) = Wielomian({A, B, C, D})
→ −0.16 x^3 − 0.26 x^2 + 2.23 x + 2.69
Wprowadź...
g
f
A
B
C
D


f(x) = e^x − 0.5 x^3 − 2 x^2 + 2 x + 3
A = Punkt(f)
→ (-5.07, 6.66)
B = Punkt(f)
→ (-2.6, -6.86)
C = Punkt(f)
→ (0.56, 5.15)
D = Punkt(f)
→ (2.68, -1.07)
E = Punkt(f)
→ (4.3, 8.49)
g(x) = Wielomian({A, B, C, D, E})
→ 0.1 x^4 + 0.05 x^3 − 2.01 x^2 + 0.79 x + 5.32
Wprowadź...
g
f
A
B
C
D
E

Interpolacja wielomianowa -postawienie zagadnienia

Niech dane będą parami różne punkty $(x_i, y_i), i=0, 1,\ldots, n.$

Zadanie interpolacji wielomianowej polega na wyznaczeniu wielomian $p \in P_n$, takiego, że

$p(x_i) = y_i$, $i=0, 1,\ldots, n$.

Mówimy, że *wielomian* p ***interpoluje wartości*** y_i *w* ***węzłach*** x_i. Jeśli są to wartości pewnej funkcji f, to mówimy, że p *interpoluje* f. Przypomnijmy, że P_n oznacza zbiór wielomianów co najwyżej n-tego stopnia.

Twierdzenie 1 (*o jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego*)

Jeżeli liczby(węzły) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *są parami różne, to istnieje dokładnie jeden wielomian* $p \in P_n$ *taki, że* $p(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$.

Dowód twierdzenia o jednoznaczności.

Jednoznaczność

Przypuśćmy, że dwa wielomiany p i q spełniają powyższe warunki. Wtedy różnica $p-q$ znika w $n+1$ różnych punktach x_i. Ponieważ jednak wielomian należący do P_n, nie znikający tożsamościowo ma co najwyżej n zer, to $p \equiv q$.

Istnienie

Skonstruujmy wielomian interpolacyjny p za pomocą następujących wielomianów $l_i(x)$ o własnościach

$$l_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

Następujące wielomiany Lagrange'a spełniają powyższe warunki

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

Rozwiązanie $p(x)$ zadania interpolacyjnego może być teraz dokładnie wyrażone w zależności od wielomianów $l_i(x)$.

Otrzymujemy *wzór interpolacyjny Lagrange'a*

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x), \quad l_i(x)=\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

c.n.d.

Ze względu na duży koszt obliczeń wielomian interpolacyjny Lagrange'a nie znajduje zastosowania w praktyce. Jego zaletą jest niezależność wielomianów l_i od rzędnych y_i, co przydaje się, gdy dla ustalonych węzłów trzeba uwzględnić różne układy wielkości y_i, na przykład wynikające z pomiarów. Bardziej użyteczne są metody opisane w dalszej części wykładów.

Podsumowując:

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a

Poszukujemy wielomianu $p \in P_n$ spełniającego warunki

$$p(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \ldots, n \qquad \text{gdzie } x_i \neq x_j \text{ dla } i \neq j \,.$$

Niech

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}$$

Wtedy

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a dany wzorem

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x), \quad l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

jest wielomianem stopnia $\leq n$, spełniającym warunki interpolacji.

Wielomiany l_i to tak zwane **wielomiany bazowe (czynnikowe, podstawowe) Lagrange'a**.

Ćwiczenie 1.

Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a i obliczyć wartość $p(2)$ dla danych

x_i	0	1	3
y_i	1	3	2

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x), \quad l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)}=\frac{(x-1)(x-3)}{3} \qquad , \; x_0=0$$

$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)}=\frac{x(x-3)}{-2} \qquad , \; x_1=1$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)}=\frac{x(x-1)}{6} \qquad , \; x_2=3$$

$$p(x)=1\cdot\frac{1}{3}(x-1)(x-3)+3\cdot(-\frac{1}{2})(x-3)+2\cdot\frac{1}{6}x(x-1)=$$

$$=\frac{1}{3}(x^2-4x+3)-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x=-\frac{5}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1$$

$$p(2)=\frac{-5\cdot 4}{6}+\frac{17\cdot 2}{6}+\frac{6}{6}=\frac{-20+34+6}{6}=\frac{10}{3}$$

Zauważmy, że wielomian interpolacyjny Lagrange'a można zapisać w postaci

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\sum_{i=0}^{n} y_j \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\,\omega'(x_i)}$$

gdzie

$$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

Błąd interpolacji wielomianowej

Twierdzenie 2.

Jeżeli $f \in C^{n+1}[a, b]$, a wielomian $p \in P_n$ interpoluje wartości funkcji f w $n+1$ różnych punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ przedziału $[a, b]$, to dla każdego $x \in [a, b]$ istnieje takie $\xi_x \in (a, b)$, że

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \quad .$$

Wniosek.

Błąd wzoru interpolacyjnego można oszacować z zależności

$$|R(x)| = |f(x) - p(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)| \, ,$$

$$M_{n+1} = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \, ,$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \, .$$

Przykład 1.

Jaki jest błąd przybliżenia funkcji $f(x)=\sin x$ wielomianem interpolacyjnym stopnia $n=9$ w przedziale [0, 1], do którego należą węzły interpolacji.

$$|f^{(10)}(\xi_x)|\le 1\ ,\ \prod_{i=0}^{9}|x-x_i|\le 1\ ,$$

zatem

$$|\sin x-p(x)|\le\frac{1}{10!}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{10!}$$

Przykład 2.

Oblicz przybliżoną wartość liczby $\sqrt{122}$ interpolując funkcję $f(x)=\sqrt{x}$ w węzłach $100, 121, 144$.

Podaj oszacowanie błędu.

x_i	100	121	144
f_i	10	11	12

$$l_0(x)=\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}=\frac{(x-121)(x-144)}{21\cdot 44}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)} = -\frac{(x-100)(x-144)}{21\cdot 23}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)} = \frac{(x-100)(x-121)}{44\cdot 23}$$

$$p(x) = 10\cdot\frac{(x-121)(x-144)}{21\cdot 44} - 11\cdot\frac{(x-100)(x-144)}{21\cdot 23}$$

$$+12\cdot\frac{(x-121)(x-144)}{44\cdot 23}$$

Stąd

$$\sqrt{122} \approx p(122) = \frac{10\cdot(-22)}{21\cdot 44} - \frac{11\cdot 22\cdot(-22)}{21\cdot 23} + \frac{12\cdot(-22)}{44\cdot 23}.$$

W naszym przypadku n=2.

$$|R(122)|=|f(122)-p(122)|\leq \frac{M_3}{3!}\,|\omega_2(x)|$$

gdzie

$$M_3=\sup_{x\in[100,144]}|f^{(3)}(x)|\,.$$

Ponieważ

$$\sqrt{x}^{(3)}=\left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right)^{(2)}=\left(\frac{-1}{4}x^{\frac{-3}{2}}\right)'=\frac{3}{8}\frac{1}{x^{5/2}}$$

jest na przedziale [100,144] funkcją >0 i malejącą,to

$$M_3=\sup_{x\in[100,144]}\left|\frac{3}{8}\frac{1}{x^{5/2}}\right|\overset{x=100}{=}\frac{3}{8}\frac{1}{100^{5/2}}=\frac{3}{8000}\sqrt{10}\,.$$

$$\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

$$\omega_2(122) = (122 - 100)(122 - 121)(122 - 144) = -22 \cdot 22 = -484$$

Zatem

$$|R(122)| = |\sqrt{122} - p(122)| \le \frac{3}{3! \cdot 8000}\sqrt{10}\,|-484| = 9{,}56588 \cdot 10^{-2}$$

Zbieżność wielomianów interpolacyjnych

Twierdzenie 3 (Faber)

Dla dowolnego ciągu układów węzłów $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$ istnieje taka funkcja ciągła w $[a, b]$, że ciąg wielomianów interpolacyjnych zbudowanych dla tych węzłów nie jest do niej zbieżny.

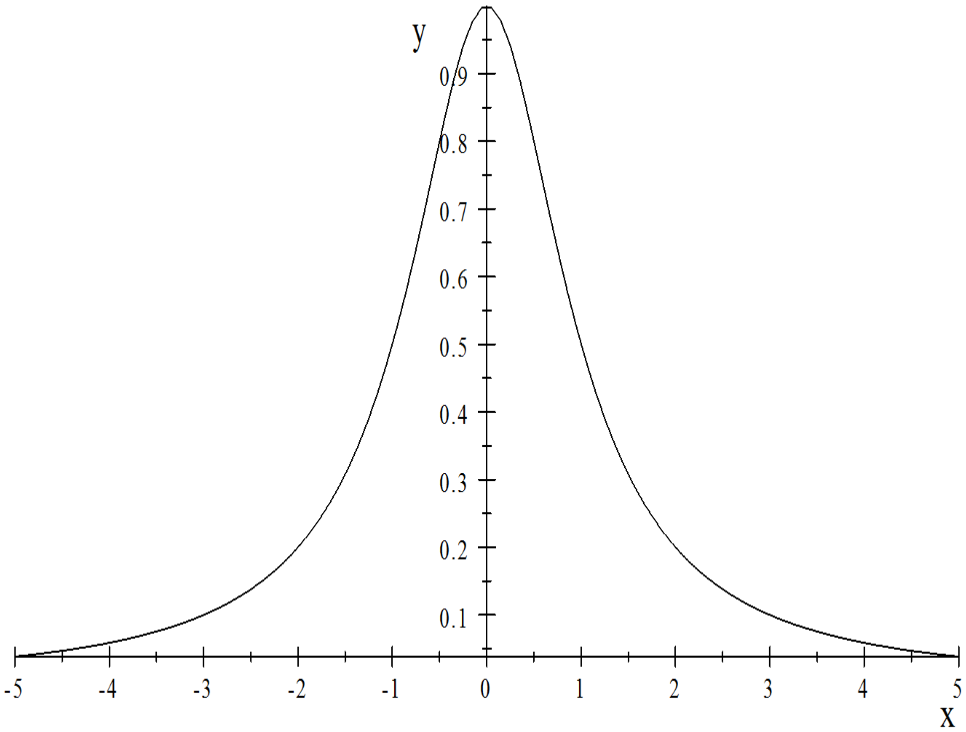
Twierdzenie 4

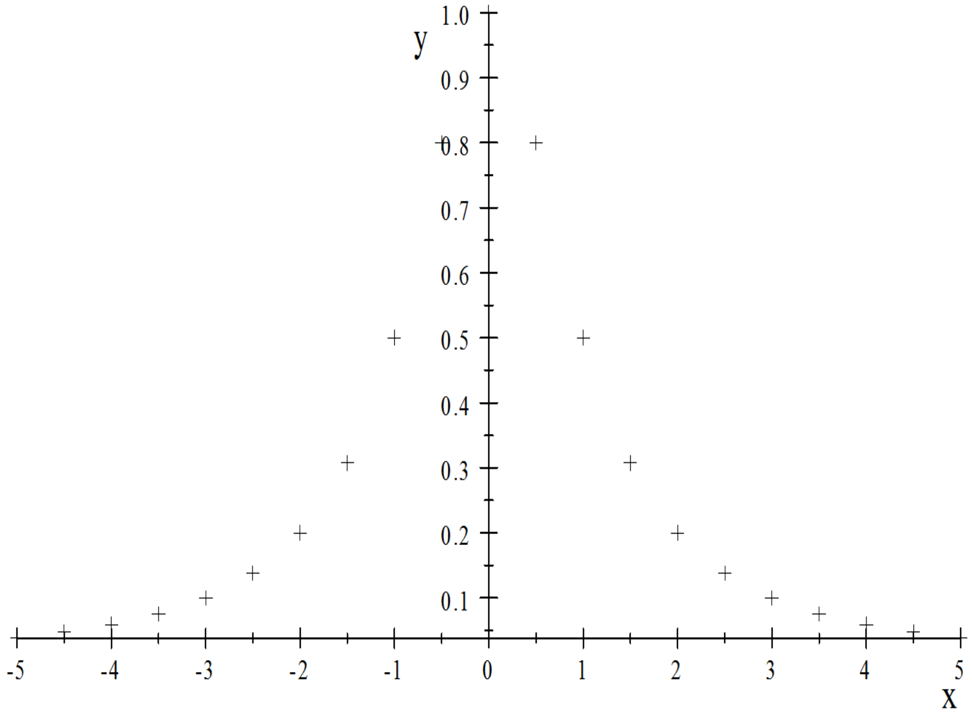
Jeżeli f jest funkcją ciągłą w $[a, b]$, to istnieje taki ciąg układów węzłów $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$, że zbudowane dla nich wielomiany interpolacyjne tworzą ciąg zbieżny do f .

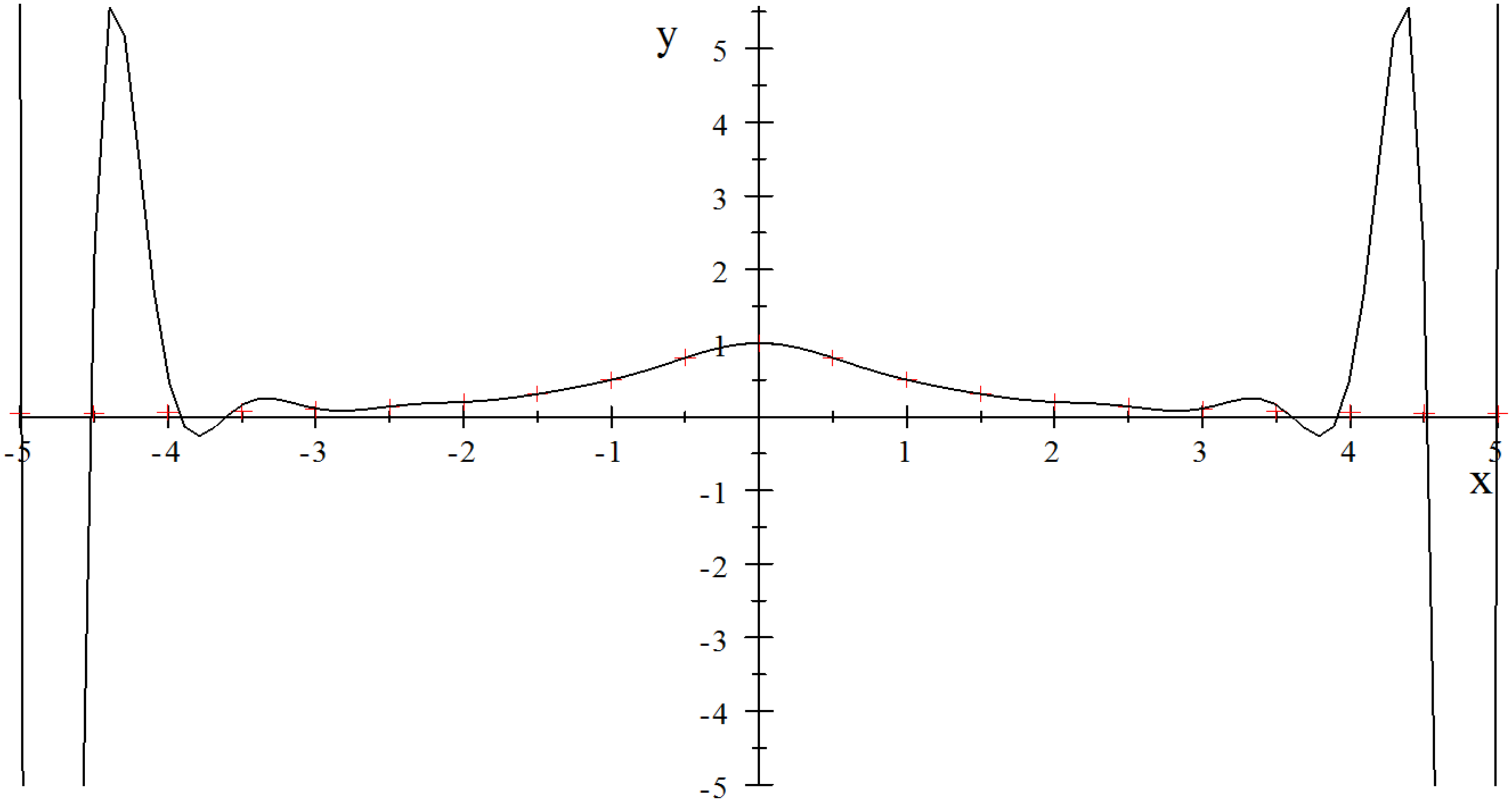
Przykład (Rungego)

Wyznaczyć wielomian interpolacyjny dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

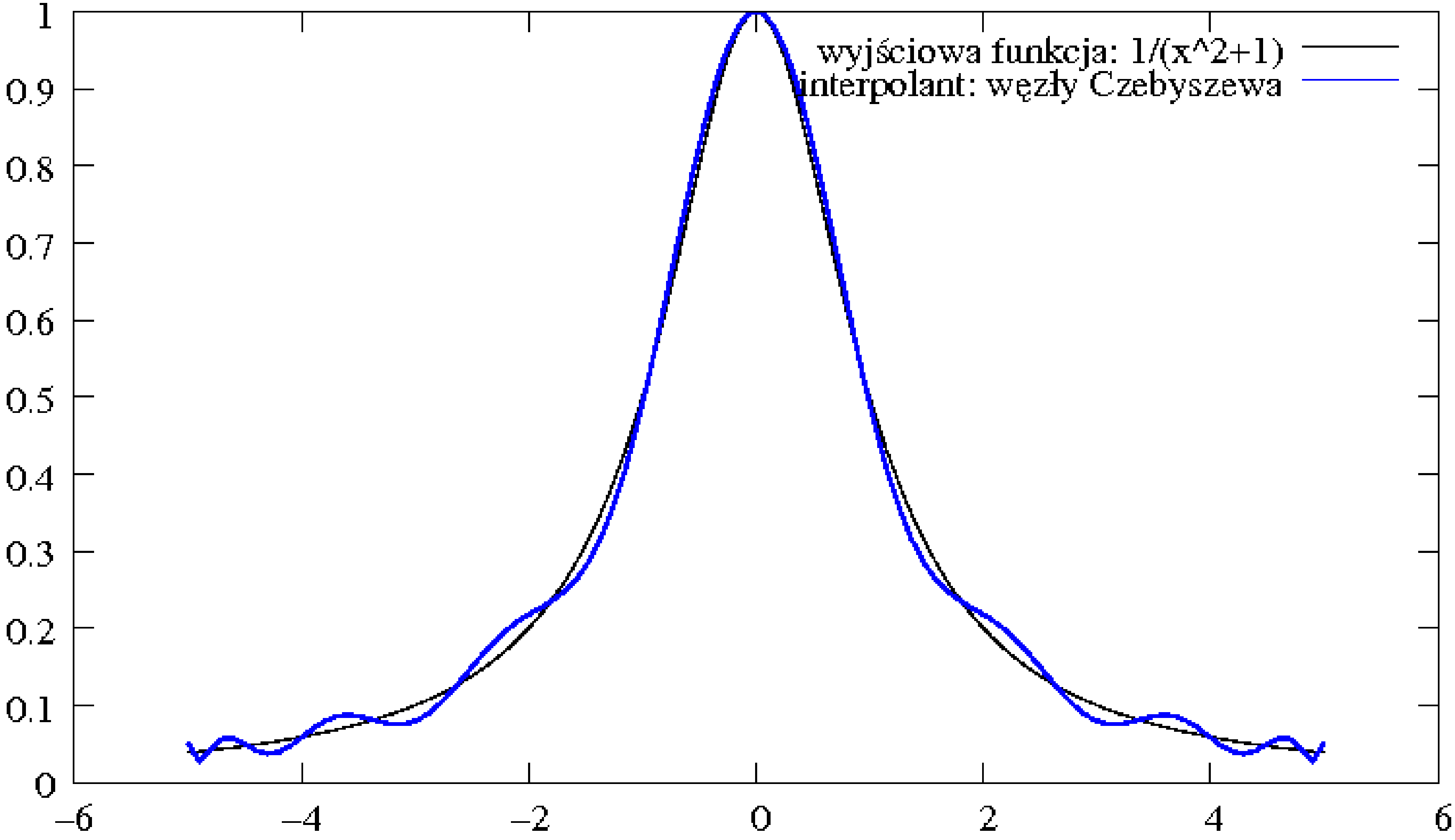
oparty na węzłach równoodległych z przedziału $[-5,5]$, krok 0.5.






y
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x

Ciąg wielomianów $\{p_n\}$ jest zbieżny do funkcji f tylko dla $|x|<3.63$ i rozbieżny dla pozostałych wartości x. Lepszym rozwiązaniem okazuje się wielomian interpolacyjny oparty na węzłach Czebyszewa (zerach wielomianu Czebyszewa):


wyjściowa funkcja: 1/(x^2+1)
interpolant: węzły Czebyszewa
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−6
−4
−2
0
2
4
6

Twierdzenie o optymalnym doborze węzłów

Błąd interpolacji jest minimalny, gdy węzły interpolacji są zadane jako węzły Czebyszewa na (a,b) i wynosi

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{2M_{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

Przykład 2.

Wykazać, że jeżeli funkcja g interpoluje funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, a funkcja h interpoluje f w węzłach $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to funkcja

$$G(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}[g(x) - h(x)]$$

interpoluje f we wszystkich węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Warunki interpolacji dla danych funkcji:

$$g: \quad x_0,\, x_{1,} \ldots, x_{n-1} \quad g(x_i)=f(x_i) \quad i=0,\, 1,\ldots, n-1$$
$$h: \quad x_1,\, x_{2,} \ldots, x_n \quad h(x_i)=f(x_i) \quad i=1,\, 2,\ldots, n$$
$$G: \quad x_0,\, x_{1,} \ldots, x_n \quad G(x_i)=f(x_i) \quad i=0,\, 1,\, 2,\ldots, n$$

Sprawdzamy warunki interpolacji dla nowej funkcji we wszystkich węzłach $x_0,\, x_1, \ldots, x_n$:

$$G(x_0)=g(x_0)+\frac{x_0-x_0}{x_n-x_0}[g(x_0)-h(x_0)]=g(x_0)=f(x_0)$$

$$G(x_n)=g(x_n)+\frac{x_0-x_n}{x_n-x_0}[g(x_n)-h(x_n)]=h(x_n)=f(x_n)$$

$$G(x_i)=g(x_i)+\frac{x_0-x_i}{x_n-x_0}[g(x_i)-h(x_i)]$$

$$=f(x_i)+\frac{x_0-x_i}{x_n-x_0}[f(x_i)-f(x_i)]=f(x_i)$$

dla i=1,2,..., n-1.