Standardowe zadanie PL (1)

Należy zaplanować produkcję zakładu w pewnym tygodniu w taki sposób, aby osiągnięty zysk był maksymalny. Zakład może wytwarzać dwa wyroby: P_1 i P_2. Ich produkcja jest limitowana dostępnymi zasobami trzech środków S_1, S_2 oraz S_3. Zasoby tych środków wynoszą odpowiednio: 14, 8 oraz 16 jednostek. Nakład środka S_1 na wytworzenie jednostki produktu P_1 wynosi 2 jednostki, podobnie jak na wytworzenie produktu P_2. Nakłady środka S_2 wynoszą, odpowiednio, 1 i 2 jednostki, natomiast środek S_3 wykorzystywany jest jedynie na potrzeby produkcji P_1 – jego nakłady wynoszą 4 jednostki. Zysk osiągnięty z wytworzenia jednostki produktu P_1 wynosi 2 jednostki, a z wytworzenia jednostki produktu P_2 3 jednostki. [**Zadanie T.Trzaskalika**]

Zmienne decyzyjne:

- x_1 - wielkość produkcji wyrobu P_1
- x_2 - wielkość produkcji wyrobu P_2

Funkcja celu [FC] (łączny zysk):

$$f(x_1 x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Ograniczenia [O]:

$$(1) \quad 2x_1 + 2x_2 \le 14$$
$$(2) \quad x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$(3) \quad 4x_1 \le 16$$

Warunki brzegowe [WB]:

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Istota METODY SIMPLEKS

Rozwiązując zadanie programowania liniowego metodą Simpleks zakładamy, iż warunki ograniczające przekształcone zostają do postaci układu równań linowych.

Zadanie, w którym wszystkie warunki ograniczające prezentowane są w postaci równości, nazywa się **zadaniem w postaci standardowej**.

METODA SIMPLEKS – zmienne bilansujące

Ograniczenie związane z wykorzystanie środka S_1:

$$(1) \quad 2x_1 + 2x_2 \le 14$$

przedstawiamy w postaci równania:

$$(1)' \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

dodając do lewej strony tzw. zmienną bilansującą x_3, definiowaną jako różnicę wartości obydwu stron nierówności wyjściowej:

$$x_3 = 14 - 2x_1 - 2x_2 \ge 0$$

Zmienną bilansującą można interpretować jako ilość środka S_1, która pozostaje niewykorzystana w przypadku realizacji planu obejmującego x_1 oraz x_2.

Podobnie jak w przypadku warunku (1) przekształceniu podlegają pozostałe ograniczenia, w obrębie których włączone zostają do zadania kolejne zmienne bilansujące x_4 oraz x_5.

Kompletna postać bazowa

Prowadzi to do następującej postaci rozwiązywanego zadania:

Funkcja celu [FC]

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

Ograniczenia [O]

$$(1) \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$
$$(2) \quad x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$
$$(3) \quad 4x_1 + x_5 = 16$$

Warunki brzegowe [WB]

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0, \quad x_5 \ge 0$$

METODA SIMPLEKS – ujecie tablicowe

Zmienne charakteryzowane podmacierzą jednostkową w obrębie macierzy **współczynników** tworzą zestawienie zmiennych bazowych: x_3, x_4, oraz x_5. Przypisując zmiennym niebazowym wartość zero, otrzymujemy rozwiązanie:

x_3=14, x_4=8 oraz x_5=16,

dla którego wartość [FC] jest równa 0.

Rozwiązanie bazowe przedstawia się w postaci **tablicy simpleksowej** będącej pewną modyfikacją postaci macierzowej zadania liniowego.

FC → max		2	3	0	0	0	**b**$_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16

Trzonem tablicy jest **macierz współczynników A** oraz **wektor wyrazów wolnych b**, wraz ze **zmiennymi bazowymi x(B)** oraz wartościami odpowiadających im **współczynników funkcji celu**.

Z tablicy simpleksowej można łatwo odczytać wartość funkcji celu obecnego rozwiązania: 0*14 + 0*8 + 0*16 = 0.

METODA SIMPLEKS – rozwiązania bazowe

Metoda Simpleks polega na rozpatrzeniu ciągu sąsiadujących **rozwiązań bazowych**, tj. rozwiązań, w których dwie kolejno rozpatrywane bazy różnią się między sobą dokładnie jedną zmienną. Doboru **bazy sąsiedniej** dokonujemy tak, aby poprawić wartość funkcji celu. Przejście pomiędzy bazami odbywa się przy wykorzystaniu **przekształceń elementarnych układu warunków ograniczających** w postaci standardowej.

Do przekształceń elementarnych zalicza się:

- podzielenie określonego warunku ograniczającego przez dowolną liczbę różną od zera
- dodanie do określonego warunku, pomnożonego przez wybraną liczbę różną od zera, innego warunku, który również może być pomnożony przez dowolną liczbę różną od zera

METODA SIMPLEKS – iteracje

Wykonując przekształcenia elementarne układu warunków ograniczających zadania PL, otrzymujemy równoważny mu układ warunków, generujących ten sam zbiór rozwiązań dopuszczalnych.

Aby wykonać kolejny krok (iterację) algorytmu simpleks, należy:

(1) potwierdzić nieoptymalność bieżącego rozwiązania bazowego

(2) wyznaczyć nową bazę sąsiednią dla rozwiązania nieoptymalnego

(3) przekształcić za pomocą przekształceń elementarnych macierz warunków ograniczających do postaci bazowej względem bazy sąsiedniej

FC → max		2	3	0	0	0	**b**$_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
z_j							
$c_j - z_j$							

Wyliczamy wartości z_j dla zmiennych bazowych, jako sumę iloczynów związanych z nimi współczynników [FC] i zmiennych modelu. Następnie wyliczamy tzw. **wskaźniki optymalności**, jako różnicę: $c_j - z_j$.

FC → max		2	3	0	0	0	**b**$_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
z_j		0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	

$c_j - z_j$ to tzw. wskaźniki optymalności

- dla zmiennych bazowych wskaźniki zawsze wynoszą „0”
- dane rozwiązanie bazowe należy uznać za optymalne jedynie w wypadku, kiedy wartości wszystkich wskaźników są **niedodatnie** (dla MAX) lub **nieujemne** (dla MIN)
- w przeciwnym wypadku należy zmienić rozwiązanie bazowe

Kryteria wejścia i wyjścia z bazy

- do nowego rozwiązania angażowana jest zmienna, która ma **największą** (dla MAX) lub **najmniejszą** (dla MIN) wartość wskaźnika optymalności (w przypadku kilku zmiennych o tym samym wskaźniku, wybierana jest zmienna o najniższym indeksie)
- wybrawszy zmienną wchodzącą do bazy, oblicza się ilorazy kolejnych wyrazów wolnych (**b**$_i$) przez odpowiadające im dodatnie (jedynie) współczynniki kolumny charakteryzującej zmienną wchodzącą, związane ze zmiennymi bazowymi
- najmniejsza wartość ilorazu wskazuje na zmienną, którą należy usunąć z bazy (dla jednakowych wartości, wybierana jest zmienna o najniższym indeksie)

FC → max		2	3	0	0	0	**b**$_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	$\boxed{0}$	0	0	1	$\boxed{16}$
z_j		0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	

x_3 : 14/2 = 7 x_4 : 8/ 2 = 4

SIMPLEX – nowa baza

FC → max		2	3	0	0	0	**b**$_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	*2*	*2* $\boxed{0}$	*1*	*0*	*0*	14
x_2	3	*1*	*2* $\boxed{1}$	*0*	*1*	*0*	8
x_5	0	*4*	*0* $\boxed{0}$	*0*	*0*	*1*	16
z_j							
$c_j - z_j$							

FC → max		2	3	0	0	0	**b**$_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_2	*stare*	1	2	0	1	0	8
	//:2	1:2	2:2	0:2	1:2	0:2	8:2
	3	1/2	$\boxed{1}$	0	1/2	0	4
x_5	0	4	0	0	0	1	16

FC → max		2	3	0	0	0	**b**$_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	*stare*	2	2	1	0	0	14
	$x_2 \cdot (-2) + x_3$	-1+2	-2+2	0+1	-1+0	0+0	-8+14
	0	1	$\boxed{0}$	1	-1	0	6
x_2	3	1/2	$\boxed{1}$	0	1/2	0	4
x_5	*stare*	4	0	0	0	1	16
	stare	4	0	0	0	1	16
	0	4	$\boxed{0}$	0	0	1	16

FC → max		2	3	0	0	0	**b**$_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1	0	1	-1	0	6
x_2	3	1/2	1	0	1/2	0	4
x_5	0	4	0	0	0	1	16
z_j		3/2	3	0	3/2	0	12
$c_j - z_j$		1/2	0	0	-3/2	0	

SIMPLEX – kolejna baza

FC → max		2	3	0	0	0	**b**$_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1	0	1	-1	0	6
x_2	3	1/2	1	0	1/2	0	4
x_5	0	4	0	0	0	1	16
z_j		3/2	3	0	3/2	0	12
$c_j - z_j$		1/2	0	0	-3/2	0	

x_3 : 6/1 = 6 x_2 : 4/0,5 = 8 x_5 : 16/4 = 4

FC → max		2	3	0	0	0	**b**$_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	-1	-1/4	2
x_2	3	0	1	0	1/2	-1/8	2
x_1	2	1	0	0	0	1/4	4
z_j		2	3	0	3/2	1/8	14
$c_j - z_j$		0	0	0	-3/2	-1/8	

Rozwiązanie optymalne: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$

METODA SIMPLEX – problemy

Punktem wyjścia metody simpleks jest wyznaczenie pierwszej dopuszczalnej postaci bazowej zadania PL. W poprzednim przykładzie otrzymano ją wprowadzając **zmienne bilansujące**. Kolejny przykład ilustruje niewystarczalność takiego podejścia i wskazuje na **zmienne sztuczne**, jako elementy pomocne w określeniu postaci wyjściowej zadania.

Standardowe zadanie PL (2)

Pewien rolnik postanowił rozpocząć eksperymentalną uprawę ziół leczniczych. Po wstępnej ocenie przydatności, pozytywna decyzja objęła dwa zioła: Z1 oraz Z2, których produkcja gwarantowała bezpieczny zbyt.

Produkcja jednego kg zioła Z1 w postaci gotowej do sprzedaży wymagała zaangażowania 9 kg specjalnych nawozów mineralnych oraz 8 kg środków ochrony roślin, natomiast produkcja jednego kg Z2 wymagała wykorzystania 7 kg nawozów i 8 kg środków ochrony – za jeden z głównych problemów dla hodowli uznano limitowany rozmiar tych środków, wynoszący odpowiednio 63 kg oraz 64 kg. Dodatkowym problemem okazała się konieczność zakupu specjalnego pestycydu, w ilości 3 kg na kilogram sprzedawanego zioła Z1 oraz 2 kg na kilogram sprzedawanego Z2 – koszt takiej dodatkowej ochrony dla uprawy w planowanej wielkości, wstępnie został wyceniony jako równowartość łącznej sprzedaży 6 kg ziół.

Wiedząc, że cena sprzedaży kilograma zioła Z1 będzie wynosić 6 tys. zł, natomiast cenę Z2 ustalono na 5 tys. zł, określ wielkość „koszyka” produkcji uprawianych ziół, maksymalizującego zysk.

Modyfikacja zadania R.Kotowskiego

Zmienne decyzyjne:

- x_1 - wielkość uprawy zioła Z1
- x_2 - wielkość uprawy zioła Z2

Funkcja celu [FC]:

$$Z(x_1 x_2) = 6x_1 + 5x_2 \to \max$$

Ograniczenia [O]:

$$(1) \quad 9x_1 + 7x_2 \le 63$$
$$(2) \quad 8x_1 + 8x_2 \le 64$$
$$(3) \quad 3x_1 + 2x_2 \ge 6$$

Warunki brzegowe [WB]:

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Sprowadzanie do postaci bazowej

[1] Przekształcamy ograniczenia tak, aby było możliwe ich zapisanie w postaci równań. W tym celu dodaje się każdorazowo dla [O] dodatkowe zmienne bilansujące, uzyskując ostatecznie:

$$(1) \quad 9x_1 + 7x_2 + x_3 = 63$$
$$(2) \quad 8x_1 + 8x_2 + x_4 = 64$$
$$(3) \quad 3x_1 + 2x_2 - x_5 = 6$$

[2] Ponieważ istotne jest założenie, iż w każdym ograniczeniu po wyzerowaniu pozostałych zmiennych występuje przynajmniej jedna zmienna nieujemna, ograniczenie (3) wymaga doprecyzowania:

$$(3) \quad 3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 = 6$$

Wprowadzona **zmienna sztuczna** nieco komplikuje rozwiązanie zadania początkowego. Rozwiązanie postaci ze zmienną sztuczną będzie równoważne rozwiązaniu zadania w postaci początkowej wówczas, gdy w ujęciu optymalnym zmienna sztuczna będzie miała wartość „0”. Z uwagi na to, wszystkie zmienne sztuczne wprowadza się do funkcji celu. Jednocześnie jednak współczynnik dobiera się wówczas tak wysoko, aby niezerowa wartość zmiennej istotnie pogarszała wartość funkcji celu.

[3] Powyższe nakazuje modyfikację funkcji celu do postaci:

$$Z(x_1 x_2 x_6) = 6x_1 + 5x_2 + Mx_6 \to \max$$
$$M = -1000$$

Ostateczna jej postać uwzględnia jednak również zmienne bilansujące, chociaż zostają one włączone ze współczynnikami równymi „0”:

$$Z(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6) = 6x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1000x_6 \to \max$$

Kompletna postać bazowa

Funkcja celu [FC]:

$$Z(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6) = 6x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1000x_6 \to \max$$

Ograniczenia [O]:

$$(1) \quad 9x_1 + 7x_2 + x_3 = 63$$
$$(2) \quad 8x_1 + 8x_2 + x_4 = 64$$
$$(3) \quad 3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 = 6$$

Warunki brzegowe [WB]:

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0, \quad x_5 \ge 0, \quad x_6 \ge 0$$

Postać bazowa – podsumowanie

- Wszystkie ograniczenia prezentowane są w postaci równań
- W każdym ograniczeniu znajduje się zmienna, która po wyzerowaniu pozostałych ma wartość nieujemną – ze współczynnikiem wynoszącym „1”
- Zmienne bilansujące uzupełniają funkcję celu z wyzerowanymi współczynnikami
- Ewentualne zmienne sztuczne uwzględnia się w funkcji celu ze współczynnikami istotnie pogarszającymi jej wartość

FC → max		6	5	0	0	0	-1000	$\mathbf{b}_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	9	7	1	0	0	0	63
x_4	0	1	1	0	1	0	0	8
x_6	-1000	3	2	0	0	-1	1	6
z_j		-3000	-2000	0	0	1000	-1000	
$c_j - z_j$		3006	2005	0	0	-1000	0	

$c_6 - z_6 = -1000 - (-1000) = 0$

FC → max		6	5	0	0	0	-1000	$\mathbf{b}_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	9	7	1	0	0	0	63
x_4	0	1	1	0	1	0	0	8
x_6	-1000	3	2	0	0	-1	1	6
z_j		-3000	-2000	0	0	1000	-1000	
$c_j - z_j$		3006	2005	0	0	-1000	0	

x_3 : 63/9 = 7 x_4 : 8/1= 8 x_6 : 6/ 3 = 2

FC → max		6	5	0	0	0	-1000	$\mathbf{b}_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	1	1	0	3	-3	45
x_4	0	0	1/3	0	1	1/3	-1/3	6
x_1	6	1	2/3	0	0	-1/3	1/3	2
z_j		6	4	0	0	-2	2	
$c_j - z_j$		0	1	0	0	2	-1002	

FC → max		6	5	0	0	0	-1000	$\mathbf{b}_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	*stare*	0	1	1	0	3	-3	45
	//:3	0:3	1:3	1:3	0:3	3:3	-3:3	45:3
	0	0	1/3	1/3	0	1	-1	15
x_4	0					0		
x_1	6					0		
z_j								
$c_j - z_j$								

FC → max		6	5	0	0	0	-1000	$\mathbf{b}_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	0	0	1/3	1/3	0	1	-1	15
x_4	*stare*	0	1/3	0	1	1/3	-1/3	6
	x_5:(-3)+ x_4	0+0	-1/9+1/3	-1/9+0	0+1	-1/3+1/3	1/3-1/3	-5+6
	0	0	2/9	-1/9	1	0	0	1
x_1	*stare*	1	2/3	0	0	-1/3	1/3	2
	x_5:3+ x_1	0+1	1/9+2/3	1/9+0	0+0	1/3-1/3	-1/3+1/3	5+2
	6	1	7/9	1/9	0	0	0	7

FC → max		6	5	0	0	0	-1000	**b**$_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	0	0	1/3	1/3	0	1	-1	15
x_4	0	0	2/9	-1/9	1	0	0	1
x_1	6	1	7/9	1/9	0	0	0	7
z_j		6	42/9	6/9	0	0	0	
$c_j - z_j$		0	1/3	-2/3	0	0	-1000	

FC → max		6	5	0	0	0	-1000	**b**$_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	*stare*	0	1/3	1/3	0	1	-1	15
	$x_2{:}(-3)+x_5$	0+0	-1/3+1/3	1/6+1/3	-3/2+0	0+1	0-1	-3/2+15
	0	0	0	1/2	-3/2	1	-1	27/2
x_2	5	0	1	-1/2	9/2	0	0	9/2
x_1	*stare*	1	7/9	1/9	0	0	0	7
	$x_2 \cdot (-7/9)+x_1$	0+1	-7/9+7/9	7/18+1/9	-7/2+0	0+0	0+0	-7/2+7
	6	1	0	1/2	-7/2	0	0	7/2

FC → max		6	5	0	0	0	-1000	**b**$_i$
x(B)	**c**(B)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	0	0	0	1/2	-3/2	1	-1	27/2
x_2	5	0	1	-1/2	9/2	0	0	9/2
x_1	6	1	0	1/2	-7/2	0	0	7/2
z_j		6	5	1/2	3/2	0	0	
$c_j - z_j$		0	0	-1/2	-3/2	0	-1000	

Wskaźniki dla zmiennych bazowych: x_5=27/2 x_2=9/2 x_1=7/2

Wskaźniki dla zmiennych niebazowych: x_3=0 x_4=0 x_6=0

Rozwiązanie końcowe:

$$x_1 = 3{,}5 \quad x_2 = 4{,}5 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 13{,}5 \quad x_6 = 0$$

Funkcja celu [FC]:

$$Z(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6) = 6*3{,}5 + 5*4{,}5 = 43{,}5$$

Zadania (rozwiązanie metodą geometryczną)

[modyfikacja zadań autorstwa B.Guzika]

Zadanie 1

Przedsiębiorstwo wytwarza dwa wyroby P1 oraz P2, używając surowców S1 oraz S2. Wiedząc o następujących ograniczeniach:

Wyroby	Surowiec		Ceny
	S1	S2	
P1	8	6	18
P2	4	9	15
Limit	52	69	

przedstaw zadanie PL w postaci klasycznej oraz zoptymalizuj funkcję celu maksymalizującą zysk z produkcji.

Zadanie 2

Zakład krawiecki szyje spodnie i spódnice wykorzystując materiał oraz umiejętności zatrudnionych pracowników. Na wykonanie pary spodni potrzeba 2m materiału oraz 8 roboczogodzin, natomiast uszycie spódnicy wymaga zużycia 3m materiału oraz 2 roboczogodzin. Zakład dysponuje obecnie zapasami materiału w ilości 60m. Zakładając, iż do rozdysponowania jest 80 roboczogodzin, wyznaczyć plan produkcji maksymalizujący dochód (spódnica kosztuje 180 zł, a spodnie 320 zł).

Zadanie 3

Pasza dostarczana zwierzętom na fermie zawierać powinna co najmniej 720g białka, 900g węglowodanów oraz 60g tłuszczu. Ferma dysponuje obecnie sianokiszonką, o parametrach: 24g białka, 10g węglowodanów i 1g tłuszczu – w 1 kg sianokiszonki. Dostarczono również okazyjnie zakupioną kiszonkę z kukurydzy, której 1 kg zawiera: 12g białka, 45g węglowodanów oraz 1,5g tłuszczu. Koszt uzyskania 1 kg sianokiszonki wynosi 0,2 zł, natomiast koszt zakupu 1 kg kiszonki z kukurydzy wynosi 0,3 zł. Wyznaczyć dawkę pokarmową dla bydła minimalizującą koszt pożywienia.