Algebra liniowa z geometrią II

Grzegorz Dymek

KUL 2022

Wstęp

Skrypt ten powstał na podstawie wykładów z Algebry liniowej z geometrią II prowadzonych na KUL-u. Przedmiot ten jest kontynuacją przedmiotu Algebra liniowa z geometrią I, do którego autor dopiero planuje napisać skrypt dydaktyczny. Kurs Algebra liniowa z geometrią II obejmuje 60 godzin, co oznacza, że materiału musi być dużo. Omówione są tutaj jeszcze dwa tematy z algebry liniowej. Następnie jest już tylko geometria począwszy od wprowadzenia i omówienia przestrzeni kartezjańskiej $\mathbb{R}^n$ aż do pełnej klasyfikacji zbiorów algebraicznych stopnia $\leqslant 2$ w zespolonej przestrzeni rzutowej. Omawiane pojęcia są podane w przystępny sposób i często są zilustrowane przykładami. Autor ma nadzieję, że skrypt ten jest wartościową pomocą dla studentów w zrozumieniu tego pięknego przedmiotu.

Rozdział 1

Formy kwadratowe

Definicja. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – funkcja

f jest *formą kwadratową* w $\mathbb{R}^n$ $\underset{df}{\Leftrightarrow}$

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

dla $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Przykłady.
1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2$, $x = (x_1, x_2)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + \alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{13}x_1x_3 + \alpha_{23}x_2x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Twierdzenie. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – forma kwadratowa

Wtedy

1) $f(0) = 0$,
2) $f(\alpha x) = \alpha^2 f(x)$.

Dowód. Łatwy. $\square$

Twierdzenie. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – forma kwadratowa

Istnieje dokładnie jedna macierz symetryczna $A = [\alpha_{ij}]_{n\times n}$ taka, że

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \quad \text{dla} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ponadto,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j.$$

Dowód. Niech $f(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} x_i x_j$ oraz $B = [\beta_{ij}]$. Wtedy

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\beta_{ij} + \beta_{ji}) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{2} x_i x_j.$$

Zatem $A = \frac{1}{2}(B + B^T)$. Oczywiście A symetryczna.

Pokażemy teraz, że A istnieje dokładnie jedna. Niech $C = [\gamma_{ij}]_{n \times n}$ będzie taka, że

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} x_i x_j.$$

Wtedy $f(e_i) = \alpha_{ii} = \gamma_{ii}$ dla $i = 1, \ldots, n$, gdzie $(e_1, \ldots, e_n)$ jest bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Ponadto,

$$f(e_i + e_j) = \alpha_{ii} + 2\alpha_{ij} + \alpha_{jj}$$

oraz

$$f(e_i + e_j) = \gamma_{ii} + 2\gamma_{ij} + \gamma_{jj} = \alpha_{ii} + 2\gamma_{ij} + \alpha_{jj},$$

czyli $\alpha_{ij} = \gamma_{ij}$ dla każdych $i, j = 1, \ldots, n$.

Stąd $A = C$, czyli A istnieje dokładnie jedna. $\square$

Definicja. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – forma kwadratowa, $A = [\alpha_{ij}]_{n \times n}$ – macierz symetryczna

A jest *macierzą formy* f w bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ $\underset{df}{\Leftrightarrow}$

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Uwaga. Dla formy kwadratowej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ można używać następującej notacji macierzowej

$$f(x) = X^T \cdot A \cdot X,$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $X = [x_1 \cdots x_n]^T$.

Definicja. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – forma kwadratowa, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ – baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$

$B = [\beta_{ij}]_{n\times n}$ jest *macierzą formy* f w $\mathcal{B}$ $\underset{df}{\Leftrightarrow}$

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} y_i y_j = Y^T BY,$$

gdzie $x = y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n$ i $Y = [y_1 \cdots y_n]^T$.

Wtedy $f(x) = Y^T \cdot B \cdot Y$ jest notacją macierzową formy f w bazie $\mathcal{B}$.

Twierdzenie. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – forma kwadratowa, $\mathcal{A}$ – baza standardowa przestrzeni $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ – baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$, A – macierz formy f w $\mathcal{A}$, $Q = [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$

Wtedy macierz B formy f w $\mathcal{B}$ ma postać

$$B = Q^T \cdot A \cdot Q.$$

Dowód. Niech $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $X = [x]^{\mathcal{A}}$, $Y = [x]^{\mathcal{B}}$. Wtedy wiemy, że $QY = X$. Stąd

$$f(x) = X^T \cdot A \cdot X = (QY)^T \cdot A \cdot (QY) = Y^T \cdot (Q^T \cdot A \cdot Q) \cdot Y$$

oraz

$$f(x) = Y^T \cdot B \cdot Y \quad \text{w bazie } \mathcal{B}.$$

Niech $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $B = [\beta_{ij}]_{n\times n}$, $Q^T \cdot A \cdot Q = [\gamma_{ij}]_{n\times n}$. Wtedy

$$f(v_i) = \gamma_{ii} = \beta_{ii} \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$f(v_i + v_j) = \gamma_{ii} + 2\gamma_{ij} + \gamma_{jj}$$

oraz

$$f(v_i + v_j) = \beta_{ii} + 2\beta_{ij} + \beta_{jj} = \gamma_{ii} + 2\beta_{ij} + \gamma_{jj}$$

dla $i, j = 1, \ldots, n$ takich, że $i \neq j$, czyli $\gamma_{ij} = \beta_{ij}$ dla każdych $i, j = 1, \ldots, n$.

Stąd $Q^T AQ = B$. $\square$

Definicja. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – forma kwadratowa, $\mathcal{B}$ – baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$

f ma *postać kanoniczną* w bazie $\mathcal{B}$ $\underset{df}{\Leftrightarrow}$

$$\bigvee_{\delta_1,\ldots,\delta_n\in\mathbb{R}} \ \bigwedge_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = \delta_1 y_1^2 + \ldots + \delta_n y_n^2,$$

gdzie $[x]^{\mathcal{B}} = [y_1 \cdots y_n]^T$, $\delta_1, \ldots, \delta_n$ – współczynniki.

Definicja. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – forma kwadratowa

Baza kanoniczna formy f $\underset{df}{=}$ baza $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ taka że f ma postać kanoniczną w $\mathcal{B}$.

Uwaga. Forma kwadratowa może mieć wiele baz kanonicznych oraz wiele postaci kanonicznych. Macierz formy kwadratowej w jej bazie kanonicznej jest diagonalna.

Twierdzenie. Każda forma kwadratowa w $\mathbb{R}^n$ ma bazę kanoniczną.

Uwaga. Jako dowód powyższego twierdzenia przedstawimy metodę Lagrange'a znajdowania postaci kanonicznej formy kwadratowej.

Metoda Lagrange'a:

Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oraz

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j.$$

1. $\bigvee_i \alpha_{ii} \neq 0$

Załóżmy, że $\alpha_{11} \neq 0$. Grupujemy wszystkie wyrazy z x_1:

$$\left(\alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \ldots + 2\alpha_{1n}x_1x_n\right) + h(x_2, \ldots, x_n)$$

i następnie mnożymy i dzielimy wyrażenie w nawiasie przez α_{11}:

$$\frac{1}{\alpha_{11}} \left(\alpha_{11}^2 x_1^2 + 2\alpha_{11}\alpha_{12}x_1x_2 + \ldots + 2\alpha_{11}\alpha_{1n}x_1x_n\right) + h(x_2, \ldots, x_n).$$

Stosujemy teraz następujący wzór:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} x_i x_j$$

i dostajemy

$$\frac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n)^2 - \frac{1}{\alpha_{11}}\left(\alpha_{12}^2x_2^2 + \ldots + \alpha_{1n}^2x_n^2 + 2\alpha_{12}\alpha_{13}x_2x_3 + \ldots\right) + h(x_2, \ldots, x_n)$$
$$= \frac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n)^2 + h_1(x_2, \ldots, x_n),$$

gdzie $h_1(x_2, \ldots, x_n) = -\frac{1}{\alpha_{11}}\left(\alpha_{12}^2x_2^2 + \ldots + \alpha_{1n}^2x_n^2 + 2\alpha_{12}\alpha_{13}x_2x_3 + \ldots\right) + h(x_2, \ldots, x_n)$ jest formą kwadratową w $\mathbb{R}^{n-1}$.

Kontynuujemy postępowanie i na końcu robimy odpowiednie podstawienie otrzymując postać kanoniczną formy f.

2. $\bigwedge\limits_{i} \alpha_{ii} = 0$

Załóżmy, że $\alpha_{12} \neq 0$. Podstawiamy

$$x_1 = y_1 + y_2,\ x_2 = y_1 - y_2,\ x_3 = y_3,\ \ldots,\ x_n = y_n.$$

Wtedy

$$2\alpha_{12}x_1x_2 = 2\alpha_{12}(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 2\alpha_{12}y_1^2 - 2\alpha_{12}y_2^2.$$

Dalej postępujemy jak w punkcie **1.**

Przykład. Stosując metodę Lagrange'a znaleźć postać kanoniczną formy kwadratowej $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takiej, że

$$f(x) = 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3x_2x_3 \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Rozwiązanie.
Mamy

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3x_2x_3 \\
&= 2\left(x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3\right) - x_2^2 + 3x_3^2 - 3x_2x_3 \\
&= 2\left(x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2x_3\right) - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2x_3 - x_2^2 + 3x_3^2 - 3x_2x_3 \\
&= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3 \\
&= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)^2 - \frac{3}{2}\left(x_2^2 + \frac{2}{3}x_2x_3\right) + x_3^2 \\
&= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)^2 - \frac{3}{2}\left(x_2^2 + \frac{2}{3}x_2x_3 + \frac{1}{9}x_3^2\right) + \frac{1}{6}x_3^2 + x_3^2 \\
&= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)^2 - \frac{3}{2}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{7}{6}x_3^2.
\end{aligned}
$$

Podstawiając

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 \\
y_2 &= x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\
y_3 &= x_3
\end{aligned}
$$

dostajemy następującą postać kanoniczną tej formy kwadratowej:

$$
f(x) = 2y_1^2 - \frac{3}{2}y_2^2 + \frac{7}{6}y_3^2.
$$

Przykład. Stosując metodę Lagrange'a znaleźć postać kanoniczną formy kwadratowej $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takiej, że

$$
f(x) = x_1x_2 - x_2x_3 + x_1x_3 \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.
$$

Rozwiązanie.

Teraz nie ma wyrazu z x_i^2. Zatem podstawiamy

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 + y_2 \\
x_2 &= y_1 - y_2 \\
x_3 &= y_3
\end{aligned}
$$

i mamy

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1x_2 - x_2x_3 + x_1x_3 \\ &= (y_1+y_2)(y_1-y_2) - (y_1-y_2)y_3 + (y_1+y_2)y_3 \\ &= y_1^2 - y_2^2 - y_1y_3 + y_2y_3 + y_1y_3 + y_2y_3 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_2y_3 \\ &= y_1^2 - \left(y_2^2 - 2y_2y_3 + y_3^2\right) + y_3^2 \\ &= y_1^2 - (y_2-y_3)^2 + y_3^2 \end{aligned}$$

Podstawiając

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 \\ z_2 &= y_2 - y_3 \\ z_3 &= y_3 \end{aligned}$$

dostajemy następującą postać kanoniczną tej formy kwadratowej:

$$f(x) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2.$$

Definicja. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – forma kwadratowa

$$f \text{ jest } \textit{dodatnio określona} \underset{df}{\Leftrightarrow} f(x) > 0 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}^n$$

Twierdzenie. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – forma kwadratowa, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i^2$ – postać kanoniczna formy f

Wtedy f jest dodatnio określona $\Leftrightarrow$ $\delta_i > 0$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$.

Dowód. Łatwy. □

Twierdzenie. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – forma kwadratowa dodatnio określona

$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ dla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Wtedy macierz $A = [\alpha_{ij}]$ formy f spełnia

1) $\alpha_{ii} > 0$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$,
2) $\det(A) > 0$.

Dowód. 1) Niech $\mathcal{A} = (e_1, \ldots, e_n)$ będzie bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wtedy

$$f(e_i) = \alpha_{ii} > 0 \quad \text{dla każdego} \quad i = 1, \ldots, n,$$

bo f jest dodatnio określona.

2) Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ będzie bazą kanoniczną formy f oraz B będzie macierzą formy f w $\mathcal{B}$.

Jeśli $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i x_i^2$ w $\mathcal{B}$, to

$$B = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_n \end{bmatrix}$$

oraz $\delta_i > 0$ dla każdego $i = 1, \dots, n$. Teraz jeśli $Q = [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, to

$$B = Q^T A Q.$$

Stąd

$$\det(B) = \det\left(Q^T\right) \cdot \det(A) \cdot \det(Q) = (\det(Q))^2 \cdot \det(A).$$

Ponieważ $\det(B) = \delta_1 \cdots \delta_n > 0$ i $(\det(Q))^2 > 0$, więc $\det(A) > 0$. $\square$

Twierdzenie. **(Jacobi)** $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ – baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – forma kwadratowa, $f(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ w $\mathcal{B}$
Jeśli

$$\Delta_k = \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{dla każdego} \quad k = 1, \dots, n,$$

to istnieje baza $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$, w której f ma postać

$$f(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2,$$

gdzie $\Delta_0 = 1$.
Ponadto,

$$f \text{ jest dodatnio określona} \quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_{k=1,\dots,n} \Delta_k > 0.$$

(bez dowodu)

Przykład. Stosując metodę Jacobiego znaleźć postać kanoniczną formy kwadratowej $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takiej, że

$$f(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Czy forma f jest dodatnio określona?

Rozwiązanie.

Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wtedy macierz formy f w $\mathcal{B}$ ma postać

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 6, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Teraz forma f jest dodatnio określona, bo $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0$, oraz f ma następującą postać kanoniczną:

$$f(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2 = \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{1}{3} y_2^2 + 6y_3^2.$$

Rozdział 2

Przestrzenie z iloczynem skalarnym

Definicja. (**Przestrzeń wektorowa unormowana**)

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (lub $= \mathbb{C}$), V – przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{F}$

Przestrzenią wektorową unormowaną nazywa się przestrzeń wektorową V, w której jest określona norma. *Normą* nazywa się funkcję $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, która spełnia następujące warunki, dla każdych $v, w \in V$ i $\alpha \in \mathbb{F}$:

1) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$.
2) $\|v\| \geqslant 0$ oraz $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
3) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$. (Nierówność trójkąta)

Przykład. Niech $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$ definiujemy następujące normy.

2-norma:

$$\|x\|_2 \underset{df}{=} \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Stąd, dla $n = 1$ mamy $\|x\|_2 = |x|$.

1-norma:

$$\|x\|_1 \underset{df}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, .$$

∞-norma:

$$\|x\|_\infty \underset{df}{=} \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \, .$$

Definicja. (**Przestrzeń z iloczynem skalarnym**)

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (lub $= \mathbb{C}$), V – przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{F}$

Przestrzenią z iloczynem skalarnym nazywa się przestrzeń wektorową V, w której jest określony iloczyn skalarny. *Iloczynem skalarnym* nazywa się funkcję $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$, która spełnia następujące warunki, dla każdych $v, v', w \in V$ i $\alpha \in \mathbb{F}$:

1) $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$.
2) $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$.
3) $\langle v, v \rangle \geqslant 0$.
4) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$.

Twierdzenie. $v, v', w \in V, \ \ \alpha \in \mathbb{F}$

Następujące warunki są prawdziwe:

5) $\langle w, v + v' \rangle = \langle w, v \rangle + \langle w, v' \rangle$.
6) $\langle v, \alpha w \rangle = \overline{\alpha} \langle v, w \rangle$.
7) $\langle v, 0 \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$.
8) $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Dowód. 5) $\langle w, v + v' \rangle \overset{4)}{=} \overline{\langle v + v', w \rangle} \overset{1)}{=} \overline{\langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle} = \overline{\langle v, w \rangle} + \overline{\langle v', w \rangle} \overset{4)}{=} \langle w, v \rangle + \langle w, v' \rangle$.

6) $\langle v, \alpha w \rangle \overset{4)}{=} \overline{\langle \alpha w, v \rangle} \overset{2)}{=} \overline{\alpha \langle w, v \rangle} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\langle w, v \rangle} \overset{4)}{=} \overline{\alpha} \cdot \langle v, w \rangle$.

7) $\langle v, 0 \rangle = \langle v, 0 + 0 \rangle \overset{5)}{=} \langle v, 0 \rangle + \langle v, 0 \rangle \ \Rightarrow \ \langle v, 0 \rangle = 0$.
Podobnie, $\langle 0, v \rangle = 0$.

8) ($\Rightarrow$) Jeśli $\langle v, v \rangle = 0$, to, na mocy 7), $\langle v, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = \langle 0, v \rangle$, skąd $v = 0$.

($\Leftarrow$) Wynika z punktu 7). $\square$

Uwaga. Jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to własność 4) mówi, że $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$. Przestrzeń z iloczynem skalarnym $V(\mathbb{F})$ taka, że $\dim V < \infty$, nazywa się *przestrzenią euklidesową*, jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, oraz *przestrzenią unitarną*, jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Przykład. Niech $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$ zdefiniujmy standardowy iloczyn skalarny następująco

$$\langle x, y \rangle \underset{df}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Ogólniej, jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$, to następujący wzór również definiuje iloczyn skalarny

$$\langle x, y \rangle_\alpha \underset{df}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i.$$

Przykład. Niech $w = (w_1, \ldots, w_n), z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. W przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}^n$ zdefiniujmy standardowy iloczyn skalarny następująco

$$\langle w, z \rangle \underset{df}{=} \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{z_i}.$$

Przykład. Niech $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. W przestrzeni wektorowej $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ zdefiniujmy standardowy iloczyn skalarny następująco

$$\langle A, B \rangle \underset{df}{=} \operatorname{tr}\left(B^T A\right).$$

Definicja. (**Wektory ortogonalne**) V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $v, w \in V$

v, w nazywają się *ortogonalne* (lub *prostopadłe*) $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ $\langle v, w \rangle = 0$.

Piszemy $v \perp w$.

Twierdzenie. (**Nierówność Cauchy-Schwarza**) V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $v, w \in V$

Wtedy

$$|\langle v, w \rangle| \leqslant \sqrt{\langle v, v \rangle} \sqrt{\langle w, w \rangle}.$$

Dowód. Jeśli $w = 0$, to

$$|\langle v, 0 \rangle| = 0 \leqslant \sqrt{\langle v, v \rangle} \sqrt{\langle 0, 0 \rangle} = 0.$$

Załóżmy, że $w \neq 0$. Wtedy $\langle w, w \rangle > 0$. Zdefiniujmy

$$\alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}.$$

Mamy

$$\langle v, w \rangle \langle w, v \rangle = \langle v, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle} = |\langle v, w \rangle|^2$$

oraz

$$\langle v - \alpha w, v - \alpha w \rangle \geqslant 0,$$

czyli

$$\langle v, v \rangle - \alpha \langle w, v \rangle - \overline{\alpha} \langle v, w \rangle + |\alpha|^2 \langle w, w \rangle \geqslant 0.$$

Zatem

$$\langle v,v\rangle - \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\langle w,w\rangle} - \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\langle w,w\rangle} + \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\langle w,w\rangle} \geqslant 0.$$

Stąd

$$\langle v,v\rangle - \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\langle w,w\rangle} \geqslant 0.$$

Zatem

$$|\langle v,w\rangle| \leqslant \sqrt{\langle v,v\rangle}\sqrt{\langle w,w\rangle}. \quad \square$$

Twierdzenie. Niech $\langle\cdot,\cdot\rangle$ będzie iloczynem skalarnym określonym w przestrzeni wektorowej V. Wtedy funkcja $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ jest normą w V, czyli przestrzeń z iloczynem skalarnym jest przestrzenią wektorową unormowaną.

Dowód. Łatwo pokazać dwa pierwsze warunki z definicji przestrzeni wektorowej unormowanej. Pokażemy nierówność trójkąta. Niech $v, w \in V$. Mamy

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= |\langle v+w, v+w\rangle| \\
&= |\langle v, v+w\rangle + \langle w, v+w\rangle| \\
&= |\langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle| \\
&\leqslant |\langle v,v\rangle| + |\langle w,w\rangle| + |\langle v,w\rangle| + |\langle w,v\rangle| \\
&\leqslant \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\sqrt{\langle v,v\rangle}\cdot\sqrt{\langle w,w\rangle} \\
&= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\,\|v\|\cdot\|w\| \\
&= (\|v\| + \|w\|)^2\,.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\|v+w\| \leqslant \|v\| + \|w\|\,.$$

Zatem przestrzeń z iloczynem skalarnym jest przestrzenią wektorową unormowaną. $\square$

Twierdzenie. V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $v, v_1, \ldots, v_n \in V$

Jeśli $v \perp v_i$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$, to

$$v \perp \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad \text{dla każdych} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}.$$

Dowód. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Ponieważ $\langle v, v_i \rangle = 0$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$, więc mamy

$$\begin{aligned} \left\langle v, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle &= \langle v, \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \rangle \\ &= \langle v, \alpha_1 v_1 \rangle + \ldots + \langle v, \alpha_n v_n \rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle v, v_1 \rangle + \ldots + \overline{\alpha_n} \langle v, v_n \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \langle v, v_i \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

czyli

$$v \perp \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i. \quad \square$$

Twierdzenie. (**Twierdzenie Pitagorasa**) V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $v, w \in V$

Jeśli $v \perp w$, to

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 .$$

Dowód. Ponieważ $\langle v, w \rangle = 0$, więc mamy

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 . \quad \square$$

Twierdzenie. (**Uogólnione twierdzenie Pitagorasa**)

V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $v_1, \ldots, v_n \in V$

Jeśli $v_1, \ldots, v_n$ są parami ortogonalne, czyli $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ dla każdych $i, j = 1, \ldots, n$ oraz $i \neq j$, to

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2 .$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie względem n. Dla $n = 1$ dowód jest łatwy. Dla $n = 2$ mamy twierdzenie Pitagorasa. Załóżmy, że równość jest prawdziwa dla ustalonego n. Niech $v_1, \ldots, v_{n+1} \in V$ będą parami ortogonalne. Mamy

$$\left\langle v_{n+1}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle = 0$$

oraz z twierdzenia Pitagorasa,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n+1} v_i \right\|^2 &= \left\| v_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} v_i \right\|^2 \\
&= \|v_{n+1}\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{n} v_i \right\|^2 \\
&= \|v_{n+1}\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \|v_i\|^2 . \quad \square
\end{aligned}$$

Wniosek. V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $v_1, \ldots, v_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$

Jeśli $v_1, \ldots, v_n$ są parami ortogonalne, czyli $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ dla każdych $i, j = 1, \ldots, n$ oraz $i \neq j$, to

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \|v_i\|^2 .$$

Wniosek. V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $v_1, \ldots, v_n \in V$

Jeśli $v_1, \ldots, v_n$ są parami ortogonalne, czyli $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ dla każdych $i, j = 1, \ldots, n$ oraz $i \neq j$, to zbiór $\{v_1, \ldots, v_n\}$ jest liniowo niezależny.

Definicja. (**Zbiór ortogonalny, zbiór ortonormalny**)

V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $v_1, \ldots, v_n \in V$

Zbiór $(v_1, \ldots, v_n)$ nazywa się *ortogonalny*, jeśli $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ dla każdych $i, j = 1, \ldots, n$ oraz $i \neq j$.
Zbiór ortogonalny $(v_1, \ldots, v_n)$ nazywa się *ortonormalny*, jeśli $\|v_i\| = 1$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$.

Wniosek. V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $v_1, \ldots, v_n \in V$, $(v_1, \ldots, v_n)$ – zbiór ortonormalny

Wtedy

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 .$$

Wniosek. Zbiór ortogonalny (ortonormalny) jest liniowo niezależny.

Definicja. (**Baza ortogonalna, baza ortonormalna**) V – przestrzeń z iloczynem skalarnym

Baza ortogonalna przestrzeni $V \underset{df}{=}$ baza przestrzeni V będąca zbiorem ortogonalnym.
Baza ortonormalna przestrzeni $V \underset{df}{=}$ baza przestrzeni V będąca zbiorem ortonormalnym.

Wniosek. V – n-wymiarowa przestrzeń z iloczynem skalarnym, $v_1, \ldots, v_n \in V$, $(v_1, \ldots, v_n)$ – zbiór ortogonalny (ortonormalny)

Wtedy $(v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą ortogonalną (ortonormalną) przestrzeni V.

Uwaga. Jeśli $(v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą ortogonalną przestrzeni z iloczynem skalarnym V, to $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni V, ponieważ $\left\|\frac{v_i}{\|v_i\|}\right\| = \frac{\|v_i\|}{\|v_i\|} = 1$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$.

Twierdzenie. V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $(v_1, \ldots, v_n)$ – baza ortogonalna przestrzeni V
Wtedy, dla każdego $v \in V$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

Dowód. $v \in V$, $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right)$ – baza ortonormalna przestrzeni V
Wtedy istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takie, że

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{v_i}{\|v_i\|}.$$

Pokażemy, że $\alpha_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|}$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$.
Dla każdego $j = 1, \ldots, n$ mamy

$$\begin{aligned} \langle v, v_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{v_i}{\|v_i\|}, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\|v_i\|} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \frac{\alpha_j}{\|v_j\|} \langle v_j, v_j \rangle = \frac{\alpha_j}{\|v_j\|} \|v_j\|^2 = \alpha_j \|v_j\|, \end{aligned}$$

skąd $\alpha_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|}$ dla każdego $j = 1, \ldots, n$. $\square$

Wniosek. V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $(v_1, \ldots, v_n)$ – baza ortonormalna przestrzeni V
Wtedy, dla każdego $v \in V$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Wniosek. V – przestrzeń z iloczynem skalarnym
$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ – baza ortonormalna przestrzeni V
Wtedy, dla każdego $v \in V$,

$$[v]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \langle v, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Definicja. (**Wektor jednostkowy**) V – przestrzeń wektorowa unormowana, $v \in V$

$$v \text{ jest } \textit{wektorem jednostkowym} \underset{df}{\Leftrightarrow} \|v\| = 1.$$

Uwaga. Niech $v \neq 0$. Wtedy $\frac{v}{\|v\|}$ jest wektorem jednostkowym.

Definicja. (**Rzut na wektor**) V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $v, w \in V$, $w \neq 0$
Definiujemy *rzut ortogonalny* wektora v na wektor w wzorem

$$\mathrm{P}_w(v) \underset{df}{=} \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w.$$

Zauważmy, że rzutowanie P_w jest przekształceniem liniowym.

Definicja. (**Rzut na podprzestrzeń**) V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $v \in V$
$W \subseteq V$ – n-wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni V
$(w_1, \ldots, w_n)$ – baza ortogonalna podprzestrzeni W
Definiujemy *rzut ortogonalny* wektora v na podprzestrzeń W wzorem

$$\mathrm{P}_W(v) \underset{df}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i.$$

Zauważmy, że rzutowanie $\mathrm{P}_W : V \to V$ jest przekształceniem liniowym, oraz $Im(\mathrm{P}_W) \subseteq W$.

Uwaga. $\mathrm{P}_W(v) = v$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v \in W$. Ponadto definicja $\mathrm{P}_W(v)$ nie zależy od bazy ortogonalnej $(w_1, \ldots, w_n)$.

Uwaga. V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $v \in V$
$W \subseteq V$ – n-wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni V
$(w_1, \ldots, w_n)$ – zbiór ortogonalny niezerowych wektorów z W
Mamy

$$v = (v - \mathrm{P}_W(v)) + \mathrm{P}_W(v).$$

Zauważmy, że $\mathrm{P}_W(v) \in W$ oraz $(v - \mathrm{P}_W(v))$ jest ortogonalny do w_i dla każdego $i = 1, \ldots, n$. Stąd, $(v - \mathrm{P}_W(v))$ jest ortogonalny do każdego wektora z W.

Wniosek. V – przestrzeń z iloczynem skalarnym, $v \in V$
$W \subseteq V$ – n-wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni V
$(w_1, \ldots, w_n)$ – baza ortonormalna podprzestrzeni W
Wtedy

$$\mathrm{P}_W(v) \underset{df}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i \rangle w_i.$$

Twierdzenie. (**Ortogonalizacja Grama-Schmidta**) V – przestrzeń z iloczynem skalarnym
$\{v_1, \ldots, v_n\}$ – zbiór liniowo niezależny
Niech

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
w_2 &= v_2 - \mathrm{P}_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 \\
w_3 &= v_3 - \mathrm{P}_{\mathrm{lin}(w_1, w_2)}(v_3) = v_3 - \left[\frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 \right] \\
&\vdots \\
w_n &= v_n - \mathrm{P}_{\mathrm{lin}(w_1, \ldots, w_{n-1})}(v_n) = v_n - \left[\frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \cdots + \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1} \right].
\end{aligned}$$

Wtedy $\{w_1, \ldots, w_n\}$ jest zbiorem ortogonalnym niezerowych wektorów z V oraz $\mathrm{lin}(w_1, \ldots, w_k) = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k)$ dla każdego $k = 1, \ldots, n$. Ponadto, zauważmy, że $\left(\frac{w_1}{\|w_1\|}, \ldots, \frac{w_n}{\|w_n\|} \right)$ jest ortonormalnym zbiorem wektorów z V rozpinającym tę samą przestrzeń co $(v_1, \ldots, v_n)$.

Dowód. Twierdzenie udowodnimy indukcyjnie względem $k = 2, \ldots, n$.
$w_2 \perp w_1$ na mocy poprzedniej Uwagi
Załóżmy, że $\{w_1, \ldots, w_k\}$ jest ortogonalny, $w_1, \ldots, w_k$ są niezerowe oraz $\mathrm{lin}(w_1, \ldots, w_k) = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k)$ dla pewnego k.
Wtedy

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \mathrm{P}_{\mathrm{lin}(w_1, \ldots, w_k)}(v_{k+1}) = v_{k+1} - \mathrm{P}_{\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k)}(v_{k+1}) \tag{2.1}$$

Na mocy poprzedniej Uwagi w_{k+1} jest ortogonalny do każdego wektora z $\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{lin}(w_1, \ldots, w_k)$.
Mamy

$$v_{k+1} \notin \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k) \text{ (z liniowej niezależności)} \Rightarrow v_{k+1} \neq \mathrm{P}_{\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k)}(v_{k+1}) \Rightarrow w_{k+1} \neq 0.$$

Stąd $\{w_1, \ldots, w_{k+1}\}$ jest zbiorem ortogonalnym wektorów niezerowych.
Z (1), $w_{k+1} \in \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_{k+1})$, czyli

$$\mathrm{lin}(w_1, \ldots, w_{k+1}) \subseteq \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_{k+1}).$$

Ponadto, $\{w_1, \ldots, w_{k+1}\}$ oraz $\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ są zbiorami ortogonalnymi, więc bazami. Stąd

$$\mathrm{lin}(w_1, \ldots, w_{k+1}) = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_{k+1}). \ \square$$

Wniosek. Każda skończenie wymiarowa przestrzeń z iloczynem skalarnym posiada bazę ortogonalną (ortonormalną).

Wniosek. V – przestrzeń z iloczynem skalarnym
$W \subseteq V$ – skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni V
Wtedy istnieje przekształcenie liniowe $P : V \to V$ takie, że $P^2 = P$, $Im(P) \subseteq W$ oraz $P(w) = w$ dla każdego $w \in W$. Zatem P jest rzutowaniem na podprzestrzeń W.

Definicja. (**Podprzestrzenie ortogonalne**) $V_1, V_2 \subseteq V$ – podprzestrzenie przestrzeni z iloczynem skalarnym V

V_1 jest ortogonalna do V_2, $V_1 \perp V_2 \underset{df}{\Leftrightarrow} v_1 \perp v_2$ dla każdych $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$.

Twierdzenie. $V_1, V_2 \subseteq V$ – podprzestrzenie przestrzeni z iloczynem skalarnym V
Wtedy,

$$V_1 \perp V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

Dowód. $0 \in V_1 \wedge 0 \in V_2 \Rightarrow 0 \in V_1 \cap V_2$
Załóżmy, że $v \in V_1 \cap V_2$. Wtedy, $v \in V_1$ oraz $v \in V_2$.
$v_2 \perp v_1 \Rightarrow \langle v, v_1 \rangle = 0$ dla każdego $v_1 \in V_1$.
W szczególności, $\langle v, v \rangle = 0$, czyli $v = 0$.
Zatem, $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. $\square$

Definicja. (**Dopełnienie ortogonalne**)
$V_1 \subseteq V$ – podprzestrzeń przestrzeni z iloczynem skalarnym V
Definiujemy *dopełnienie ortogonalne* podprzestrzeni V_1 w V wzorem

$$V_1^\perp \underset{df}{=} \{v \in V : \langle v, v_1 \rangle = 0 \text{ dla każdego } v_1 \in V_1\}.$$

Ćwiczenie. Pokazać, że $\{0\}^\perp = V$ oraz $V^\perp = \{0\}$.

Ćwiczenie. Niech V_1 będzie podprzestrzenią przestrzeni z iloczynem skalarnym V. Pokazać, że $V_1^\perp$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Następne Twierdzenie podaje algorytm wyznaczania dopełnienienia ortogonalnego.

Twierdzenie. V – n-wymiarowa przestrzeń z iloczynem skalarnym
$W \subseteq V$ – k-wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni V
$(v_1, \ldots, v_k)$ – baza przestrzeni W, $(v_1, \ldots, v_n)$ – rozszerzenie zbioru $(v_1, \ldots, v_k)$
$w_1, \ldots, w_n$ – wektory ortonormalne otrzymane za pomocą ortogonalizcji Grama-Schmidta
Wtedy $(w_1, \ldots, w_k)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni W oraz $(w_{k+1}, \ldots, w_n)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $W^\perp$.

Dowód. Wiemy, że $\text{lin}(w_1, \ldots, w_k) = \text{lin}(v_1, \ldots, v_k)$, czyli $(w_1, \ldots, w_k)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni W.
$w_{k+1}, \ldots, w_n$ są ortonormalne, więc liniowo niezależne

$$W^\perp \stackrel{?}{=} \text{lin}(w_{k+1}, \ldots, w_n)$$

Niech $j \in \{k+1, \ldots, n\}$. Wtedy $w_j \perp w_i$ dla każdego $i = 1, \ldots, k$ (z ortogonalizcji Grama-Schmidta), czyli w_j jest ortogonalny do wszystkich wektorów z W.
Stąd, $w_j \in W^\perp$. Zatem $\text{lin}(w_{k+1}, \ldots, w_n) \subseteq W^\perp$.
Niech $w \in W^\perp \subseteq V$. Stąd,

$$w = \sum_{i=1}^{n} \langle w, w_i \rangle w_i.$$

Ponieważ $w \in W^\perp$, więc $\langle w, w_i \rangle = 0$ dla każdego $i = 1, \ldots, k$, czyli

$$w = \sum_{i=k+1}^{n} \langle w, w_i \rangle w_i.$$

Stąd $w \in \text{lin}(w_{k+1}, \ldots, w_n)$. Zatem

$$W^\perp = \text{lin}(w_{k+1}, \ldots, w_n). \ \square$$

Wniosek. V – skończenie wymiarowa przestrzeń z iloczynem skalarnym
$W \subseteq V$ – podprzestrzeń przestrzeni V
Wtedy

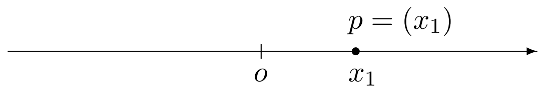
$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V).$$

Wniosek. V – skończenie wymiarowa przestrzeń z iloczynem skalarnym
$W \subseteq V$ – podprzestrzeń przestrzeni V
Wtedy każdy $v \in V$ można jednoznacznie zapisać jako $v = w_1 + w_2$, gdzie $w_1 \in W$ oraz $w_2 \in W^\perp$.

Rozdział 3

Przestrzeń kartezjańska $\mathbb{R}^n$

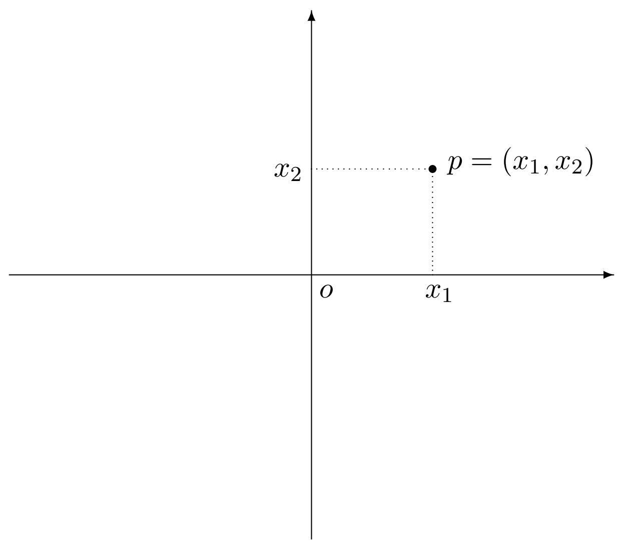
Współrzędne kartezjańskie na prostej:



Na prostej obieramy dowolny punkt o jako początek. Dzieli on prostą na dwie półproste. Przyjmując jedną półprostą jako dodatnią a drugą jako ujemną otrzymujemy oś. Dowolnemu punktowi p przyporządkowujemy liczbę x_1 nazywaną współrzędną kartezjańską punktu p. W ten sposób dostajemy **przestrzeń kartezjańską** $\mathbb{R}^1$.
Wzór na odległość dwóch punktów $x, y \in \mathbb{R}^1$:

$$\rho(x, y) = |x - y| \, .$$

Współrzędne kartezjańskie na płaszczyźnie:



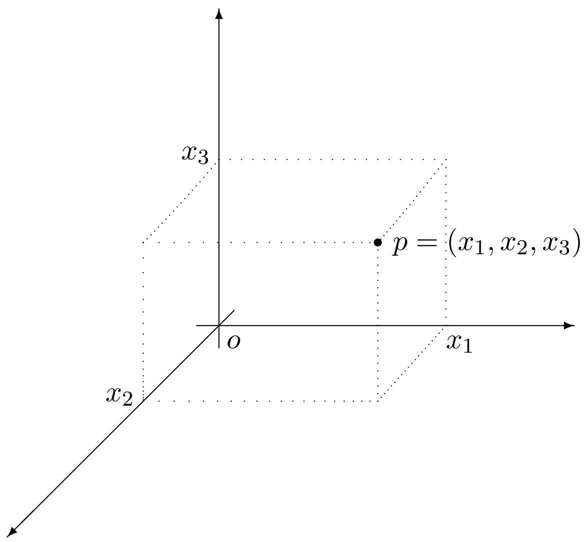
Na płaszczyźnie rozpatrzmy dwie proste przecinające się w punkcie o jako początku. Na każdej z tych prostych wprowadźmy współrzędne kartezjańskie (jak wyżej). Otrzymujemy osie, które tworzą kartezjański układ współrzędnych.

$p = (x_1, x_2)$ – współrzędne kartezjańskie punktu p

Jeżeli osie są prostopadłe, to współrzędne kartezjańskie nazywają się prostokątne. W ten sposób dostajemy **przestrzeń kartezjańską** $\mathbb{R}^2$.
Wzór na odległość dwóch punktów $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Współrzędne kartezjańskie w przestrzeni:



W przestrzeni weźmy trzy proste nie leżące w jednej płaszczyźnie i przechodzące przez jeden punkt o jako początek. Na każdej z tych prostych wprowadźmy współrzędne kartezjańskie. Otrzymujemy osie, które tworzą kartezjański układ współrzędnych.

$p = (x_1, x_2, x_3)$ – współrzędne kartezjańskie punktu p

Jeśli każda oś jest prostopadła do dwu pozostałych osi, to układ nazywa się prostokątny. W ten sposób dostajemy **przestrzeń kartezjańską** $\mathbb{R}^3$.
Wzór na odległość dwóch punktów $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Definicja. (**Przestrzeń metryczna**) X – dowolny zbiór, $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ – funkcja

Przestrzenią metryczną nazywa się parę (X, ρ) spełniającą warunki

1) $\bigwedge_{x,y \in X} \rho(x, y) = \rho(y, x)$,
2) $\bigwedge_{x,y \in X} \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
3) $\bigwedge_{x,y,z \in X} \rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

Elementy zbioru X – punkty, ρ – metryka, $\rho(x, y)$ – odległość punktów x, y.

Definicja. (**Przestrzeń kartezjańska n-wymiarowa**) Przestrzenią kartezjańską n-wymiarową nazywa się zbiór

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

wraz z metryką $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ określoną wzorem

$$\rho((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Zatem $(\mathbb{R}^n, \rho)$ jest przestrzenią metryczną.

Ćwiczenie. Pokazać, że funkcja ρ określona powyżej jest metryką.

Definicja. $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

Definiujemy

$$\begin{aligned}
x + y &\underset{df}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad - \quad \text{dodawanie punktów } x, y,\\
-x &\underset{df}{=} (-x_1, \ldots, -x_n)\\
x - y &\underset{df}{=} x + (-y) \quad - \quad \text{odejmowanie punktów } x, y,\\
tx &\underset{df}{=} (tx_1, \ldots, tx_n) \quad - \quad \text{mnożenie punktu } x \text{ przez liczbę } t,\\
x \cdot y &\underset{df}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad - \quad \text{mnożenie skalarne punktów } x, y,\\
x^1 &= x, x^{k+1} \underset{df}{=} x^k \cdot x \quad - \quad \text{potęgowanie punktu } x,\\
0 &\underset{df}{=} (0, \ldots, 0).
\end{aligned}$$

Twierdzenie. $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

Mamy

1) $x + y = y + x$,
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
3) $t(x + y) = tx + ty$,

4) $tx = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee x = 0$,
5) $x \cdot y = y \cdot x$,
6) $\sim (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
7) $(tx) \cdot y = t(x \cdot y)$,
8) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
9) $(tx)^k = t^k x^k$,
10) $\sim (x \cdot y)^k = x^k \cdot y^k$,
11) $(x \cdot y)^2 \leqslant x^2 \cdot y^2$ – nierówność Schwarza.

Dowód. Łatwy. $\square$

Definicja. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Modułem punktu x nazywa się liczbę:

$$|x| \underset{df}{=} \rho(x, 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

(jest to odległość punktów x i 0).

Twierdzenie. $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

Mamy

1) $x^2 = |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$,
2) $\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y)^2}$,
3) $|x| \geqslant 0$,
4) $|x| = |-x|$,
5) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
6) $|tx| = |t|\,|x|$,
7) $|x \cdot y| \leqslant |x| \cdot |y|$,
8) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$,
9) $|x| - |y| \leqslant |x - y|$,
10) $(x + y)^2 = x^2 + 2x \cdot y + y^2$,
11) $(x - y)^2 = x^2 - 2x \cdot y + y^2$,
12) $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$.

Dowód. 1) – 5) Łatwy.

6) $|tx| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (tx_i)^2} = \sqrt{t^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |t| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |t|\,|x|$.

7) $|x \cdot y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} = |x| \cdot |y|$ (z nierówności Schwarza).

8) $|x + y| = |x - (-y)| = \rho(x, -y) \leqslant \rho(x, 0) + \rho(0, -y) = \rho(x, 0) + \rho(0, y) = |x| + |y|$.

9) $|x| = |y + (x - y)| \leqslant |y| + |x - y|$, skąd $|x| - |y| \leqslant |x - y|$.

10), 11) i 12) wynikają z własności 8) poprzedniego twierdzenia. $\square$

Definicja. (X, ρ) – przestrzeń metryczna, $a, b \in X$

Odcinkiem metrycznym nazywa się zbiór:

$$\langle a, b \rangle \underset{df}{=} \{x \in X : \rho(a, x) + \rho(x, b) = \rho(a, b)\}.$$

Definicja. (X, ρ) – przestrzeń metryczna, $a, b, c \in X$

$$c \text{ jest } \textit{środkiem} \text{ odcinka } \langle a, b \rangle \underset{df}{\Leftrightarrow} \rho(a, c) = \rho(b, c) = \frac{1}{2}\rho(a, b).$$

Twierdzenie. $a, b \in \mathbb{R}^n$

Wtedy istnieje dokładnie jeden środek odcinka $\langle a, b \rangle$; jest to punkt $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

Dowód. Jeśli $a = b$, to Twierdzenie jest oczywiste. Niech $a \neq b$. Mamy

$$\rho(a, c) = |a - c| = \left|a - \frac{1}{2}(a + b)\right| = \frac{1}{2}|a - b| = \frac{1}{2}|b - a| = \left|b - \frac{1}{2}(a + b)\right| = |b - c| = \rho(b, c).$$

Stąd c jest środkiem odcinka $\langle a, b \rangle$.

Niech $d = c + x$ będzie innym środkiem odcinka $\langle a, b \rangle$. Wtedy

$$\rho(a, d) = \frac{1}{2}\rho(a, b) = \frac{1}{2}|a - b| = |a - d| = \left|a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - x\right| = \left|\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} \cdot 2x\right| = \frac{1}{2}|a - b - 2x|,$$

czyli $|a - b| = |a - b - 2x|$.
Podobnie,

$$\rho(b, d) = \frac{1}{2}|a - b| = |d - b| = \frac{1}{2}|a - b + 2x|,$$

skąd $|a - b| = |a - b + 2x|$.
Zatem

$$|a - b - 2x|^2 = |a - b + 2x|^2,$$

czyli

$$(a - b)^2 - 4x(a - b) + 4x^2 = (a - b)^2 + 4x(a - b) + 4x^2,$$

skąd

$$x(a - b) = 0.$$

Teraz $a - b \neq 0$ (bo $a \neq b$), więc $x = 0$.
Zatem $d = c$. $\square$

Definicja. $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$A \text{ jest } \textit{wypukły} \underset{df}{\Leftrightarrow} \bigwedge_{a,b \in A} \langle a, b \rangle \subseteq A.$$

Wniosek. Odcinek w $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem wypukłym.

Rozdział 4

Wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Definicja. *Wektor związany* w $\mathbb{R}^n \underset{df}{=}$ uporządkowana para punktów w $\mathbb{R}^n$.

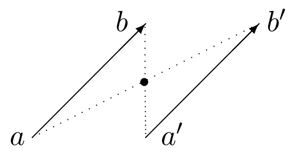
Oznaczenie: $\overrightarrow{ab}$ dla $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Definicja. Współrzędne wektora związanego $\overrightarrow{ab} \underset{df}{=}$ współrzędne punktu $b - a$.

Jeśli $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, to $\overrightarrow{ab} = [b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n]$.

Definicja. $a, b, a', b' \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'} \underset{df}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{ab} \text{ i } \overrightarrow{a'b'} \text{ mają te same współrzędne} \underset{df}{\Leftrightarrow} b - a = b' - a' \\ \Leftrightarrow a' + b = a + b' \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a' + b) = \frac{1}{2}(a + b')\end{aligned}$$



(dwa wektory związane $\overrightarrow{ab}$ i $\overrightarrow{a'b'}$ są równe $\Leftrightarrow$ pokrywają się środki odcinków $\langle a', b\rangle$ i $\langle a, b'\rangle$).

Twierdzenie. Relacja równości wektorów związanych jest relacją równoważności.

Dowód. Łatwy. $\square$

Definicja. *Wektor swobodny* (*wektor*) w $\mathbb{R}^n \underset{df}{=}$ klasa równoważności relacji równości wektorów związanych,

czyli

$$\left[\overrightarrow{ab}\right] = \left\{\overrightarrow{cd} : \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}\right\} \quad - \quad \text{wektor swobodny o reprezentancie } \overrightarrow{ab}.$$

Oznaczenie: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ (małe litery gotyckie).

Uwaga. Wszystkie reprezentanty wektora swobodnego mają te same współrzędne.

Definicja. Współrzędne wektora swobodnego $\underset{df}{=}$ współrzędne jego reprezentanta.

Definicja. $\mathfrak{a}, a, b \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}$

$$|\mathfrak{a}| \underset{df}{=} \rho(a, b) \quad - \quad \text{długość wektora } \mathfrak{a}.$$

Jeśli $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, to $|\mathfrak{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$.

Definicja. *Wersor* $\underset{df}{=}$ wektor o długości 1.

Twierdzenie. (**O zaczepianiu wektora swobodnego w punkcie**) Każdy wektor swobodny w $\mathbb{R}^n$ można zaczepić w dowolnym punkcie $a \in \mathbb{R}^n$ w dokładnie jeden sposób.

Dowód. $\mathfrak{a}, a \in \mathbb{R}^n$
Szukamy punktu $b \in \mathbb{R}^n$ takiego, że $\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}$.
Niech $\overrightarrow{cd} \in \mathfrak{a}$. Wtedy

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} \Leftrightarrow b - a = d - c \Leftrightarrow b = d - c + a. \quad \square$$

Twierdzenie. Dla każdego wektora swobodnego $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$ i każdego punktu $b \in \mathbb{R}^n$ istnieje dokładnie jeden reprezentant wektora $\mathfrak{a}$ o końcu b.

Dowód. Analogiczny (wyliczamy a). $\square$

Definicja. $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \mathfrak{b} = [\beta_1, \ldots, \beta_n] \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

Definiujemy

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} + \mathfrak{b} &\underset{df}{=} [\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n] \quad - \quad \text{dodawanie wektorów } \mathfrak{a}, \mathfrak{b},\\
-\mathfrak{a} &\underset{df}{=} [-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n] \quad - \quad \text{wektor przeciwny do } \mathfrak{a},\\
\mathfrak{a} - \mathfrak{b} &\underset{df}{=} [\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n] \quad - \quad \text{różnica wektorów } \mathfrak{a}, \mathfrak{b},\\
t\mathfrak{a} &\underset{df}{=} [t\alpha_1, \ldots, t\alpha_n] \quad - \quad \text{mnożenie wektora } \mathfrak{a} \text{ przez liczbę } t,\\
\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} &\underset{df}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \quad - \quad \text{iloczyn skalarny wektorów } \mathfrak{a}, \mathfrak{b}.
\end{aligned}$$

Uwaga. Piszemy $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$.

Twierdzenie. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

Mamy

1) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$,

2) $(t\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b} = t(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$,

3) $\mathfrak{a}^2 = |\mathfrak{a}|^2$,

4) $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$,

5) $-|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \leqslant \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \leqslant |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|$.

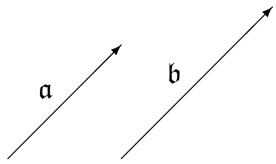
Dowód. Łatwy. Punkt 5) wynika z nierówności Schwarza. $\square$

Twierdzenie. $\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a} \ \wedge \ \overrightarrow{bc} \in \mathfrak{b} \ \Rightarrow \ \overrightarrow{ac} \in [\mathfrak{a} + \mathfrak{b}]$

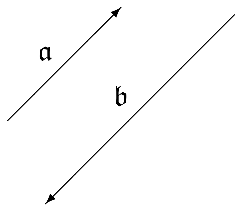
Dowód. Łatwy. $\square$

Definicja. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ są *zgodnie równoległe*, $\mathfrak{a} \upharpoonleft\upharpoonright \mathfrak{b} \ \underset{df}{\Leftrightarrow} \ |\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| = |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}|$



$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ są *przeciwnie równoległe*, $\mathfrak{a} \upharpoonleft\downharpoonright \mathfrak{b} \ \underset{df}{\Leftrightarrow} \ |\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| = |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|$



$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ są *równoległe*, $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b} \ \underset{df}{\Leftrightarrow} \ \mathfrak{a} \upharpoonleft\upharpoonright \mathfrak{b} \ \vee \ \mathfrak{a} \upharpoonleft\downharpoonright \mathfrak{b}$

Twierdzenie. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{a} \neq 0 \neq \mathfrak{b}$

Wtedy,

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b} \ &\Leftrightarrow \ \bigvee_{t \neq 0} \mathfrak{b} = t\mathfrak{a} \\ \text{oraz} \quad t > 0 \ &\Rightarrow \ \mathfrak{a} \upharpoonleft\upharpoonright \mathfrak{b}, \\ t < 0 \ &\Rightarrow \ \mathfrak{a} \upharpoonleft\downharpoonright \mathfrak{b}. \end{aligned}$$

Dowód. Łatwy. $\square$

Twierdzenie. W zbiorze wektorów niezerowych w $\mathbb{R}^n$ relacje $\parallel$ i $\upharpoonleft\upharpoonright$ są relacjami równoważności.

Dowód. Łatwy. $\square$

Definicja. $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$

Kierunek wektora $\mathfrak{a} \underset{df}{=}$ klasa równoważności relacji $\|$ o reprezentancie $\mathfrak{a}$,

czyli

$$\mathcal{K}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{b} : \mathfrak{b} \parallel \mathfrak{a} \ \wedge \ \mathfrak{b} \neq 0\}.$$

Zwrot wektora $\mathfrak{a} \underset{df}{=}$ klasa równoważności relacji $\upharpoonleft\upharpoonright$ o reprezentancie $\mathfrak{a}$,

czyli

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{b} : \mathfrak{b} \upharpoonleft\upharpoonright \mathfrak{a} \ \wedge \ \mathfrak{b} \neq 0\}.$$

Mamy: $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{a})$.

Uwaga. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{a} \neq 0 \neq \mathfrak{b}$

Ponieważ $-|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \leqslant \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \leqslant |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|$, więc istnieje dokładnie jedna liczba θ taka, że

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \cos\theta \ \text{ i } \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Jeśli $\mathfrak{a} = 0$ lub $\mathfrak{b} = 0$, to θ jest dowolna taka, że $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Definicja. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$

Liczba $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in [0, \pi]$ taka, że

$$\cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|}$$

nazywa się *kątem w* $\mathbb{R}^n$ *między wektorami* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$.

Twierdzenie. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$

Mamy

1) $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sphericalangle(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$,
2) $t, s > 0 \ \Rightarrow \ \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sphericalangle(t\mathfrak{a}, s\mathfrak{b})$,
3) $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + \sphericalangle(-\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \pi$,
4) $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sphericalangle(-\mathfrak{a}, -\mathfrak{b})$.

Dowód. Łatwy. $\square$

Definicja. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \text{ są } \textit{prostopadłe}, \ \mathfrak{a} \perp \mathfrak{b} \ \underset{df}{\Leftrightarrow} \ \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\pi}{2} \ \vee \ \mathfrak{a} = 0 \ \vee \ \mathfrak{b} = 0.$$

Twierdzenie. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$

Wtedy

$$\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b} \ \Leftrightarrow \ \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0.$$

Dowód. Wynika natychmiast ze wzoru $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$. $\square$

Definicja. **(Iloczyn wektorowy w $\mathbb{R}^3$)** $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $\mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \underset{df}{=} \left[\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \right].$$

Uwaga. Jeśli przez i, j, k oznaczymy wersory osi współrzędnych w $\mathbb{R}^3$, czyli $i = [1, 0, 0]$, $j = [0, 1, 0]$ i $k = [0, 0, 1]$, to

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Przykład. Wyznaczyć $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ jeśli $\mathfrak{a} = [1, 1, -1]$ i $\mathfrak{b} = [2, -1, 3]$.

Rozwiązanie.

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right] = [2, -5, -3].$$

Twierdzenie. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathbb{R}^3$. Wtedy

1) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} = 0$,
2) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$,
3) $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}$ oraz $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$,
4) $t \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = (t \cdot \mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times (t \cdot \mathfrak{b})$, gdzie $t \in \mathbb{R}$,
5) $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$, gdzie $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $\mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, $\mathfrak{c} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$,
6) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$,
7) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \perp \mathfrak{a}$ oraz $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \perp \mathfrak{b}$,
8) $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Dowód. Punkty 1) – 5) wynikają z powyższej Uwagi.

6) Mamy

$$\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b} \;\Leftrightarrow\; \bigvee_{t \neq 0} \mathfrak{b} = t\mathfrak{a} \;\Leftrightarrow\; \bigvee_{t \neq 0} (t\mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \bigvee_{t \neq 0} t(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = 0.$$

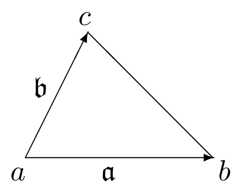
7) Wynika z 5).

8) Mamy dla $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ i $\mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$:

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|^2 &= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 \\
&= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 \\
&= \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2 \\
&= (|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|)^2 - (|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|)^2 \cos^2 \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \\
&= (|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^2,
\end{aligned}$$

skąd $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. $\square$

Twierdzenie. $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, $\triangle(a, b, c)$ – trójkąt o wierzchołkach a, b, c, $\mathfrak{a} = \left[\overrightarrow{ab}\right]$, $\mathfrak{b} = \left[\overrightarrow{ac}\right]$



Wtedy

$$|\triangle(a, b, c)| = \frac{1}{2}\,|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$$

(pole trójkąta).

Dowód. Mamy następujący wzór Herona

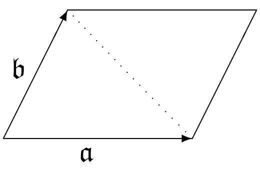
$$|\triangle(a, b, c)| = \frac{1}{4}\sqrt{s[s - 2\rho(b, c)][s - 2\rho(a, c)][s - 2\rho(a, b)]},$$

gdzie $s = \rho(a, b) + \rho(a, c) + \rho(b, c)$.
Stąd

$$\begin{aligned}
|\triangle(a, b, c)| &= \frac{1}{4}\sqrt{(|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|)(|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| - |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|)(|\mathfrak{a}| - |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|)(-|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})(|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| - \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2} \\
&= \frac{1}{2}\,|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).
\end{aligned}$$

Zatem $|\triangle(a, b, c)| = \frac{1}{2}\,|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$. $\square$

Wniosek. Liczba $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$ jest polem równoległoboku zbudowanego na wektorach $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^3$:



Rozdział 5

Przekształcenia przestrzeni metrycznej

Definicja. (X, ρ), $(Y, \overline{\rho})$ – przestrzenie metryczne, $f : X \to Y$

$$f \text{ jest } \textit{izometrią} \underset{df}{\Leftrightarrow} 1) f : X \xrightarrow{na} Y,$$
$$2) \bigwedge_{x,x' \in X} \overline{\rho}(f(x), f(x') = \rho(x, x').$$

Przykłady.
1. Przesunięcie: $a \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = x + a$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Wtedy f jest izometrią, bo

$$\rho(f(x), f(x')) = \sqrt{(f(x) - f(x'))^2} = \sqrt{[(x + a) - (x' + a)]^2} = \sqrt{(x - x')^2} = \rho(x, x')$$

dla $x, x' \in \mathbb{R}^n$.
2. Obrót płaszczyzny $\mathbb{R}^2$: $\alpha \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$f(x) = (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)$ – obrót o kąt α
Wtedy f jest izometrią, bo

$$\begin{aligned}
\rho(f(x), f(x'))^2 &= [(x_1 - x_1') \cos\alpha - (x_2 - x_2') \sin\alpha]^2 + [(x_1 - x_1') \sin\alpha + (x_2 - x_2') \cos\alpha]^2 \\
&= (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 \\
&= \rho(x, x')^2
\end{aligned}$$

dla $x = (x_1, x_2), x' = (x_1', x_2') \in \mathbb{R}^2$.

Twierdzenie. Izometria jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym.

Dowód. (X,ρ), $(Y,\overline{\rho})$, $\quad f: X \to Y$ – izometria
Niech $x, x' \in X$. Załóżmy, że $f(x) = f(x')$. Wtedy

$$0 = \overline{\rho}(f(x), f(x')) = \rho(x, x') \ \Rightarrow \ x = x'. \ \square$$

Twierdzenie. Jeżeli $f : X \to Y$ jest izometrią, to $f^{-1} : Y \to X$ jest izometrią.

Dowód. (X,ρ), $(Y,\overline{\rho})$, $\quad f: X \to Y$ – izometria
Oczywiście, f^{-1} jest na (bo f jest na).
Niech $y, y' \in Y$. Istnieją $x, x' \in X$ takie, że $f^{-1}(y) = x$ i $f^{-1}(y') = x'$. Stąd $y = f(x)$ i $y' = f(x')$.
Mamy

$$\rho(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) = \rho(x, x') = \overline{\rho}(f(x), f(x')) = \overline{\rho}(y, y'). \ \square$$

Twierdzenie. Superpozycja dwu izometrii jest izometrią.

Dowód. (X,ρ), $(Y,\overline{\rho})$, $(Z,\widehat{\rho})$, $\quad f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ – izometrie
Stąd

$$\bigwedge_{x,x' \in X} \overline{\rho}(f(x), f(x')) = \rho(x, x')$$

oraz

$$\bigwedge_{y,y' \in Y} \widehat{\rho}(g(y), g(y')) = \overline{\rho}(y, y').$$

Wtedy $gf : X \to Z$ i

$$\bigwedge_{x,x' \in X} \widehat{\rho}(gf(x), gf(x')) = \overline{\rho}(f(x), f(x')) = \rho(x, x'). \ \square$$

Definicja. (X,ρ), $(Y,\overline{\rho})$ – przestrzenie metryczne, $f : X \to Y$

$$f \text{ jest } \textit{podobieństwem} \underset{df}{\Leftrightarrow} 1) f : X \xrightarrow{na} Y,$$
$$2) \bigvee_{\lambda > 0} \bigwedge_{x,x' \in X} \overline{\rho}(f(x), f(x') = \lambda \rho(x, x').$$

λ – współczynnik podobieństwa

Uwaga. Każda izometria jest podobieństwem o współczynniku 1.

Przykład. Jednokładność o współczynniku $c > 0$: $j_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $j_c(x) = cx$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Wtedy j_c jest podobieństwem o współczynniku c, bo

$$\rho(j_c(x), j_c(x')) = \sqrt{(j_c(x) - j_c(x'))^2} = \sqrt{(cx - cx')^2} = c\sqrt{(x - x')^2} = c\rho(x, x')$$

dla $x, x' \in \mathbb{R}^n$.

Twierdzenie. Podobieństwo jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym.

Dowód. (X, ρ), $(Y, \overline{\rho})$, $\quad f : X \to Y$ – podobieństwo o współczynniku $\lambda > 0$
Niech $x, x' \in X$ i $f(x) = f(x')$. Wtedy

$$0 = \overline{\rho}(f(x), f(x')) = \lambda\rho(x, x')$$

oraz

$$\lambda > 0 \;\Rightarrow\; \rho(x, x') = 0 \;\Rightarrow\; x = x'. \;\square$$

Twierdzenie. Jeżeli $f : X \to Y$ jest podobieństwem o współczynniku $\lambda > 0$, to $f^{-1} : Y \to X$ jest podobieństwem o współczynniku $\frac{1}{\lambda}$.

Dowód. (X, ρ), $(Y, \overline{\rho})$, $\quad f : X \to Y$ – podobieństwo o współczynniku $\lambda > 0$
Oczywiście, f^{-1} jest na (bo f jest na).
Niech $y, y' \in Y$. Istnieją $x, x' \in X$ takie, że $f^{-1}(y) = x$ i $f^{-1}(y') = x'$. Stąd $y = f(x)$ i $y' = f(x')$.
Mamy

$$\rho(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) = \rho(x, x') = \frac{1}{\lambda}\overline{\rho}(f(x), f(x')) = \frac{1}{\lambda}\overline{\rho}(y, y').$$

Zatem f^{-1} jest podobieństwem o współczynniku $\frac{1}{\lambda}$. $\square$

Twierdzenie. Superpozycja dwu podobieństw jest podobieństwem.

Dowód. (X, ρ), $(Y, \overline{\rho})$, $(Z, \widehat{\rho})$

$f : X \to Y$ – podobieństwo o współczynniku λ_1, $\;g : Y \to Z$ – podobieństwo o współczynniku λ_2
Pokażemy, że $gf : X \to Z$ jest podobieństwem o współczynniku $\lambda_1\lambda_2$. Niech $x, x' \in X$ i $y, y' \in Y$.
Wiemy, że

$$\overline{\rho}(f(x), f(x')) = \lambda_1\rho(x, x')$$

oraz

$$\widehat{\rho}(g(y), g(y')) = \lambda_2\overline{\rho}(y, y').$$

Mamy

$$\widehat{\rho}(gf(x), gf(x')) = \lambda_2\overline{\rho}(f(x), f(x')) = \lambda_1\lambda_2\rho(x, x'). \;\square$$

Definicja. (X, ρ), $(Y, \overline{\rho})$ – przestrzenie metryczne

X i Y są *izometryczne* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ istnieje izometria $f : X \to Y$.

X i Y są *podobne* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ istnieje podobieństwo $g : X \to Y$.

Uwaga. Jeżeli X, Y są izometryczne, to są podobne, ale nie na odwrót.

Rozdział 6

Proste, płaszczyzny i hiperpłaszczyzny w przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Definicja. (X, ρ) – przestrzeń metryczna, $Y \subseteq X$

$(Y, \rho|Y \times Y) \underset{df}{=}$ podprzestrzeń przestrzeni metrycznej (X, ρ).

Definicja.

Prosta $\underset{df}{=}$ podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$ izometryczna z $\mathbb{R}^1$.

Uwaga. $L \subseteq \mathbb{R}^n$

L jest prostą $\Leftrightarrow$ L jest izometryczna z $\mathbb{R}^1$ $\Leftrightarrow$ istnieje izometria $f : \mathbb{R}^1 \to L$ $\Leftrightarrow$ istnieje izometria $g : L \to \mathbb{R}^1$.

Uwaga. W $\mathbb{R}^1$ istnieje dokładnie jedna prosta. Jest nią $\mathbb{R}^1$.

Twierdzenie. (**O prostej**) Przez każde dwa różne punkty $a, b \in \mathbb{R}^n$ przechodzi dokładnie jedna prosta; jest nią zbiór $\{x(t) = (1-t)a + tb : t \in \mathbb{R}\} = L(a, b)$, gdzie $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ nazywa się przedstawieniem parametrycznym prostej $L(a, b)$.

Dowód. Weźmy $f : \mathbb{R}^1 \to L(a, b)$ takie, że $f(t) = x\left(\frac{t}{\rho(a,b)}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Mamy dla $t, t' \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
\rho(f(t), f(t'))^2 &= \left[\left(1 - \frac{t}{\rho(a,b)}\right) a + \frac{t}{\rho(a,b)} b - \left(1 - \frac{t'}{\rho(a,b)}\right) a - \frac{t'}{\rho(a,b)} b\right]^2 \\
&= \left[\frac{(t-t')a - (t-t')b}{\rho(a,b)}\right]^2 = (t-t')^2 \\
&= \rho(t, t')^2.
\end{aligned}
$$

Stąd f jest izometrią, czyli $L(a, b)$ jest prostą. Ponadto, $x(0) = a$ i $x(1) = b$ skąd $a, b \in L(a, b)$.

Pokażemy teraz, że $L(a, b)$ jest jedyna. Załóżmy, że istnieje prosta K taka, że $a, b \in K$. Pokażemy, że $K \subseteq L(a, b)$.

$g : \mathbb{R}^1 \to K$ – izometria

Istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ i $\alpha < \beta$.

Weźmy $c = g(\gamma) \in K$ takie, że $a \neq c \neq b$. Przypuśćmy, że $\alpha < \beta < \gamma$. Wtedy $|\beta - \alpha| + |\gamma - \beta| = |\gamma - \alpha|$. Stąd $\rho(b, a) + \rho(c, b) = \rho(c, a)$, bo g jest izometrią. Zatem

$$\left|\overrightarrow{ab}\right| + \left|\overrightarrow{bc}\right| = \left|\overrightarrow{ac}\right| = \left|\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}\right|,$$

czyli $\overrightarrow{ab} \parallel \overrightarrow{ac}$. Stąd istnieje $t \neq 0$ takie, że $c - a = t(b - a)$, skąd $c = (1-t)a + tb = x(t) \in L(a, b)$.

Podobnie gdy $\alpha < \gamma < \beta$ i $\gamma < \alpha < \beta$. Zatem $K \subseteq L(a, b)$. Dokładniej $K = L(a, b)$. $\square$

Uwaga. Piszemy następujące równanie parametryczne prostej $L(a, b)$:

$$L = L(a, b) : x(t) = (1 - t)a + tb, \; t \in \mathbb{R}.$$

Definicja. $\mathfrak{a}, a, b \in \mathbb{R}^n$, $\quad L \subseteq \mathbb{R}^n$ – prosta

$\overrightarrow{ab}$ leży na $L \underset{df}{\Leftrightarrow} a, b \in L$.

$\mathfrak{a} \parallel L \;\underset{df}{\Leftrightarrow}\; \bigvee\limits_{\overrightarrow{ab}} \overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a} \;\wedge\; \overrightarrow{ab}$ leży na $L \;\Leftrightarrow\; \bigvee\limits_{a,b \in L} \overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}$.

Definicja. $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$, $\quad L \subseteq \mathbb{R}^n$ – prosta

Kierunek prostej $L \underset{df}{=}$ kierunek wektora $\mathfrak{a} \parallel L$.

Wektor kierunkowy prostej $L \underset{df}{=}$ wektor $\mathfrak{a} \parallel L$.

Twierdzenie. (**Druga postać równania parametrycznego prostej w** $\mathbb{R}^n$)

$\mathfrak{a}, a \in \mathbb{R}^n$, $\quad L \subseteq \mathbb{R}^n$ – prosta

Wtedy

$a \in L \;\wedge\; \mathfrak{a} \parallel L \;\wedge\; \mathfrak{a} \neq 0 \;\Rightarrow\; L : x(t) = a + t\mathfrak{a}, \; t \in \mathbb{R}$.

Dowód. $a \in L$, $\mathfrak{a} \parallel L$, $\mathfrak{a} \neq 0$

Z Twierdzenia o zaczepianiu wektora swobodnego w punkcie, wektor $\mathfrak{a}$ można zaczepić w punkcie a. Wtedy istnieje punkt $b \in L$ (bo $\mathfrak{a} \parallel L$) taki, że $\mathfrak{a} = \left[\overrightarrow{ab}\right]$.

Z Twierdzenia o prostej dla $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&L : x(t) = (1 - t)a + tb, \text{ czyli} \\
&L : x(t) = a + t(b - a), \\
&L : x(t) = a + t\left[\overrightarrow{ab}\right], \\
&L : x(t) = a + t\mathfrak{a}. \;\square
\end{aligned}$$

Uwaga. Jeśli $a = (a_1, \ldots, a_n) \in L$ oraz $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \parallel L$, to równanie parametryczne prostej $L : x(t) = a + t\mathfrak{a},\ t \in \mathbb{R}$ ma postać:

$$L : x(t) = (a_1 + t\alpha_1, \ldots, a_n + t\alpha_n),\ t \in \mathbb{R}.$$

Na przykład, $L : x(t) = (1 + 2t, -1 + 3t),\ t \in \mathbb{R}$ jest prostą w $\mathbb{R}^2$ taką, że $a = (1, -1) \in L$ i $\mathfrak{a} = [2, 3] \parallel L$, oraz $K : y(s) = (-1 + s, 2 - s, 3 + 2s),\ s \in \mathbb{R}$ jest prostą w $\mathbb{R}^3$ taką, że $a = (-1, 2, 3) \in K$ i $\mathfrak{a} = [1, -1, 2] \parallel K$.

Definicja. $L, K \subseteq \mathbb{R}^n$ – proste, $\mathfrak{a} \parallel L$, $\mathfrak{b} \parallel K$

$$L \parallel K \underset{df}{\Leftrightarrow} \mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b} \Leftrightarrow \bigvee_{t \neq 0} \mathfrak{b} = t\mathfrak{a}.$$

$$L \perp K \underset{df}{\Leftrightarrow} \mathfrak{a} \perp \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0.$$

Definicja. $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^2$, $\quad L \subseteq \mathbb{R}^2$ – prosta

Kierunek normalny prostej $L \underset{df}{=}$ kierunek wektora $\mathfrak{a} \perp L$.

Wektor normalny prostej $L \underset{df}{=}$ wektor $\mathfrak{a} \perp L$.

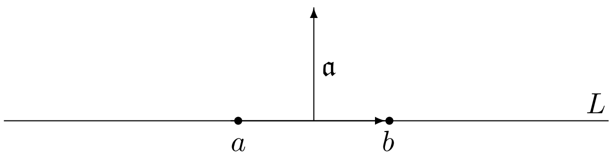
Twierdzenie. Dla każdego punktu $a \in \mathbb{R}^2$ i każdego niezerowego wektora $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2]$ istnieje w $\mathbb{R}^2$ dokładnie jedna prosta przechodząca przez a o wektorze normalnym $\mathfrak{a}$. Składa się ona z wszystkich punktów (x_1, x_2) spełniających równanie

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0, \text{ gdzie } \alpha_0 = -a \cdot (\mathfrak{a}).$$

Jest to równanie liniowe prostej L takie, że $a \in L$ i $\mathfrak{a} \perp L$.

Dowód. $a = (a_1, a_2) \in L$, $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2] \perp L$, $b = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Wtedy



$$\begin{aligned} b \in L \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{ab}\right] \perp \mathfrak{a} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{ab}\right] \cdot \mathfrak{a} = 0 \\ \Leftrightarrow [x_1 - a_1, x_2 - a_2] \cdot [\alpha_1, \alpha_2] = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_1(x_1 - a_1) + \alpha_2(x_2 - a_2) = 0 \\ \Leftrightarrow -(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0. \end{aligned}$$

Przyjmując

$$\alpha_0 = -(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) = -a \cdot (\mathfrak{a})$$

otrzymujemy

$$L : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0.$$

Oczywiście, taka prosta jest tylko jedna. $\square$

Twierdzenie. $L, K \subseteq \mathbb{R}^2$ – proste, $L : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$, $K : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0$

Wtedy

$$K = L \iff \bigvee_{t \neq 0} \beta_i = t\alpha_i \text{ dla } i = 0, 1, 2.$$

$$K \parallel L \iff \bigvee_{t \neq 0} \beta_i = t\alpha_i \text{ dla } i = 1, 2.$$

Dowód. Łatwy. $\square$

Definicja. $L, K \subseteq \mathbb{R}^2$ – proste, $a \in \mathbb{R}^2$

$$\rho(a, L) \underset{df}{=} \rho(a, b), \text{ gdzie } b \in K \cap L \text{ i } a \in K \perp L.$$

(odległość punktu a od prostej L w $\mathbb{R}^2$)

Twierdzenie. $L \subseteq \mathbb{R}^2$ – prosta, $L : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

Wtedy

$$\rho(a, L) = \frac{|\alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}.$$

Dowód. $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2] \perp L$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Wtedy $L : \alpha_0 + x \cdot (\mathfrak{a}) = 0$.

Weźmy prostą K taką, że $K : x(t) = a + t\mathfrak{a}$. Wtedy $b \in K \cap L$, czyli $b = a + t'\mathfrak{a}$ oraz $\alpha_0 + b \cdot (\mathfrak{a}) = 0$, skąd

$$\begin{aligned} \alpha_0 + (a + t'\mathfrak{a}) \cdot (\mathfrak{a}) &= 0 \\ \alpha_0 + a \cdot (\mathfrak{a}) + t'\mathfrak{a}^2 &= 0 \\ t'\mathfrak{a}^2 &= -\alpha_0 - a \cdot (\mathfrak{a}) \\ t' &= -\frac{\alpha_0 + a \cdot (\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}^2}. \end{aligned}$$

Stąd $b = a - \frac{\alpha_0 + a \cdot (\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}^2}\mathfrak{a}$ i

$$\begin{aligned} \rho(a, L) = \rho(a, b) &= |b - a| \\ &= \left| a - \frac{\alpha_0 + a \cdot (\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}^2}\mathfrak{a} - a \right| \\ &= \frac{|\alpha_0 + a \cdot (\mathfrak{a})|}{|\mathfrak{a}|^2} |\mathfrak{a}| \\ &= \frac{|\alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}. \quad \square \end{aligned}$$

Definicja. Równanie $\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ prostej L w $\mathbb{R}^2$ nazywa się *unormowane*, jeśli $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2]$ jest wersorem (czyli $|\mathfrak{a}| = 1$).

Wniosek. Jeśli $\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ jest równaniem unormowanym prostej L w $\mathbb{R}^2$ i $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, to

$$\rho(a, L) = |\alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2| .$$

Twierdzenie. Każda prosta w $\mathbb{R}^2$ ma równanie unormowane.

Dowód. Łatwy. $\square$

Twierdzenie. $L(a,b) \subseteq \mathbb{R}^2$ – prosta, $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$

Wtedy

$$L(a,b) : \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dowód. $\left[\overrightarrow{ab}\right] = [b_1 - a_1, b_2 - a_2] \parallel L(a,b)$

Łatwo widać, że

$$[b_1 - a_1, b_2 - a_2] \cdot [-(b_2 - a_2), b_1 - a_1] = 0,$$

skąd

$$[-(b_2 - a_2), b_1 - a_1] \perp L(a,b),$$

czyli

$$L(a,b) : -(a_1, a_2) \cdot (-(b_2 - a_2), b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)x_1 + (b_1 - a_1)x_2 = 0.$$

Stąd

$$L(a,b) : (a_2 x_1 + b_1 x_2 + a_1 b_2) - (b_2 x_1 + a_1 x_2 + a_2 b_1) = 0,$$

czyli

$$L(a,b) : \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0. \quad \square$$

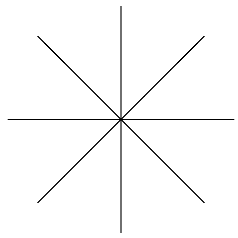
Uwaga. L, K – proste w $\mathbb{R}^2$

$L \parallel K \;\Rightarrow\; L = K \;\vee\; L \cap K = \emptyset,$

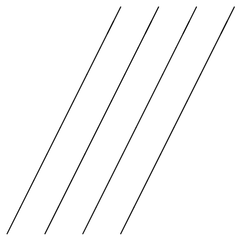
$L \nparallel K \;\Rightarrow\; L \cap K$ jest punktem.

Definicja.

Pęk prostych właściwy w $\mathbb{R}^2 \underset{df}{=}$ zbiór wszystkich prostych przechodzących przez jeden punkt



Pęk prostych niewłaściwy w $\mathbb{R}^2 \underset{df}{=}$ zbiór wszystkich prostych o tym samym kierunku



Uwaga. Każde dwie różne proste w $\mathbb{R}^2$ wyznaczają pęk (właściwy lub niewłaściwy). Stosujemy następujące oznaczenie:

$\mathrm{P}(L, K) =$ pęk prostych w $\mathbb{R}^2$ wyznaczony przez proste L, K.

Twierdzenie. (**O pęku prostych w** $\mathbb{R}^2$)

$L : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0,\ K : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0,\ L \neq K$

Wtedy

$$M \in \mathrm{P}(L, K) \Leftrightarrow \bigvee_{\eta,\lambda\in\mathbb{R},\, \eta^2+\lambda^2>0} M : \eta(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \lambda(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) = 0.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli $\eta^2 + \lambda^2 > 0$, to

$$\eta(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \lambda(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) = 0$$

jest równaniem liniowym pewnej prostej w $\mathbb{R}^2$. Istotnie, mamy $[\alpha_1, \alpha_2] \neq 0 \neq [\beta_1, \beta_2]$, skąd $[\eta\alpha_1 + \lambda\beta_1, \eta\alpha_2 + \lambda\beta_2] = \eta[\alpha_1, \alpha_2] + \lambda[\beta_1, \beta_2] \neq 0$.

($\Rightarrow$) $M \in \mathrm{P}(L, K),\ \ a = (a_1, a_2) \in M,\ \ a \notin L \cup K$
Wystarczy przyjąć: $\eta = \beta_0 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2$ and $\lambda = -(\alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że

$$\bigvee_{\eta,\lambda\in\mathbb{R},\, \eta^2+\lambda^2>0} M : \eta(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \lambda(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) = 0.$$

Mamy dwa przypadki:

1) $\mathrm{P}(L,K)$ jest właściwy.

Wtedy punkt przecięcia prostych L i K spełnia równanie prostej M, czyli $M \in \mathrm{P}(L,K)$.

2) $\mathrm{P}(L,K)$ jest niewłaściwy.

Wtedy $\bigvee\limits_{t\neq 0} [\beta_1, \beta_2] = t[\alpha_1, \alpha_2]$ (są równoległe), skąd

$$\begin{aligned}[\eta\alpha_1 + \lambda\beta_1, \eta\alpha_2 + \lambda\beta_2] &= \eta[\alpha_1, \alpha_2] + \lambda[\beta_1, \beta_2] \\ &= \eta[\alpha_1, \alpha_2] + \lambda t[\alpha_1, \alpha_2] \\ &= (\eta + \lambda t)[\alpha_1, \alpha_2],\end{aligned}$$

czyli $M \parallel L \parallel K$. $\square$

Uwaga. Równoważnie mamy

$$M \in \mathrm{P}(L,K) \Leftrightarrow \bigvee_{\lambda\in\mathbb{R}} M : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \lambda(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) = 0$$

(w tym przypadku nie istnieje λ takie, że $M = K$).

Definicja.

Proste współpękowe w $\mathbb{R}^2 \underset{df}{=}$ proste należące do jednego pęku.

Twierdzenie.

$L : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$, $K : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0$, $M : \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0$ – różne proste

Proste L, K, M są współpękowe $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dowód. $M \in \mathrm{P}(L,K) \Leftrightarrow$ istnieją $\eta, \lambda, \delta \in \mathbb{R}$, $\eta^2 + \lambda^2 > 0$ takie, że

$$\begin{cases} \eta\alpha_0 + \lambda\beta_0 = -\delta\gamma_0, \\ \eta\alpha_1 + \lambda\beta_1 = -\delta\gamma_1, \\ \eta\alpha_2 + \lambda\beta_2 = -\delta\gamma_2, \end{cases}$$

który jest równoważny układowi

$$\begin{cases} \eta\alpha_0 + \lambda\beta_0 + \delta\gamma_0 = 0, \\ \eta\alpha_1 + \lambda\beta_1 + \delta\gamma_1 = 0, \\ \eta\alpha_2 + \lambda\beta_2 + \delta\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Układ ten ma niezerowe rozwiązanie $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad \square$$

Definicja.

Płaszczyzna $\underset{df}{=}$ podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$ izometryczna z $\mathbb{R}^2$.

Definicja. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, a, b \in \mathbb{R}^n$, $\quad P \subseteq \mathbb{R}^n$ – płaszczyzna

$\overrightarrow{ab}$ leży na $P \underset{df}{\Leftrightarrow} a, b \in P$.

$\mathfrak{a} \parallel P \underset{df}{\Leftrightarrow} \bigvee\limits_{\overrightarrow{ab}} \overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a} \ \wedge\ \overrightarrow{ab}$ leży na $P \ \Leftrightarrow \bigvee\limits_{a,b \in P} \overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}$.

$\mathfrak{b} \perp P \underset{df}{\Leftrightarrow} \bigwedge\limits_{\mathfrak{a} \parallel P} \mathfrak{b} \perp \mathfrak{a}$.

Definicja. $P \subseteq \mathbb{R}^3$ – płaszczyzna, $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^3$

Kierunek normalny płaszczyzny $P \underset{df}{=}$ kierunek wektora $\mathfrak{a} \perp P$.

Wektor normalny płaszczyzny $P \underset{df}{=}$ wektor $\mathfrak{a} \perp P$.

Definicja. $P, Q \subseteq \mathbb{R}^3$ – płaszczyzny, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^3$

$P \parallel Q \underset{df}{\Leftrightarrow} \mathfrak{a} \perp P \ \wedge\ \mathfrak{b} \perp Q \ \wedge\ \mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$.

$P \perp Q \underset{df}{\Leftrightarrow} \mathfrak{a} \perp P \ \wedge\ \mathfrak{b} \perp Q \ \wedge\ \mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$.

Twierdzenie. Dla każdego punktu $a \in \mathbb{R}^3$ i każdego niezerowego wektora $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ istnieje w $\mathbb{R}^3$ dokładnie jedna płaszczyzna przechodząca przez a o wektorze normalnym $\mathfrak{a}$. Składa się ona z wszystkich punktów (x_1, x_2, x_3) spełniających równanie

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \text{ gdzie } \alpha_0 = -a \cdot (\mathfrak{a}).$$

Jest to równanie liniowe płaszczyzny P takiej, że $a \in P$ i $\mathfrak{a} \perp P$.

Dowód. Podobny do dowodu twierdzenia o równaniu liniowym prostej. $\square$

Twierdzenie. $P, Q \subseteq \mathbb{R}^3$ – płaszczyzny, $P : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$, $Q : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0$

Wtedy

$P = Q \ \Leftrightarrow \bigvee\limits_{t \neq 0} \beta_i = t\alpha_i$ dla $i = 0, 1, 2, 3$.

$P \parallel Q \ \Leftrightarrow \bigvee\limits_{t \neq 0} \beta_i = t\alpha_i$ dla $i = 1, 2, 3$.

Dowód. Łatwy. $\square$

Definicja. $P \subseteq \mathbb{R}^3$ – płaszczyzna, $L \subseteq \mathbb{R}^3$ – prosta, $a \in \mathbb{R}^3$

$$\rho(a,P) \underset{df}{=} \rho(a,b), \text{ gdzie } b \in P \cap L \text{ i } a \in L \perp P$$

(odległość punktu a od płaszczyzny P w $\mathbb{R}^3$).

Twierdzenie. $P \subseteq \mathbb{R}^3$ – płaszczyzna, $P : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$, $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$

Wtedy

$$\rho(a,P) = \frac{|\alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

Dowód. Podobny do dowodu odpowiedniego twierdzenia dla prostej. $\square$

Definicja. Równanie $\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ płaszczyzny P w $\mathbb{R}^3$ nazywa się *unormowane*, jeśli $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ jest wersorem (czyli $|\mathfrak{a}| = 1$).

Wniosek. Jeśli $\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ jest równaniem unormowanym płaszczyzny P w $\mathbb{R}^3$ i $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, to

$$\rho(a,P) = |\alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3|\,.$$

Twierdzenie. Każda płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$ posiada równanie unormowane.

Dowód. Łatwy. $\square$

Twierdzenie. $P \subseteq \mathbb{R}^3$ – płaszczyzna, $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{ab} \nparallel \overrightarrow{ac}$

Wtedy

$$P : \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dowód. Analogiczny jak w przypadku prostej w $\mathbb{R}^2$. $\square$

Uwaga. $P, Q \subseteq \mathbb{R}^3$ – płaszczyzny

$P \parallel Q \;\Rightarrow\; P = Q \;\vee\; P \cap Q = \emptyset,$

$P \nparallel Q \;\Rightarrow\; P \cap Q$ jest prostą.

Definicja.

Pęk płaszczyzn właściwy w $\mathbb{R}^3 \underset{df}{=}$ zbiór wszystkich płaszczyzn zawierających tę samą prostą.

Pęk płaszczyzn niewłaściwy w $\mathbb{R}^3 \underset{df}{=}$ zbiór wszystkich płaszczyzn o tym samym kierunku normalnym.

Uwaga. Każde dwie różne płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$ wyznaczają pęk (właściwy lub niewłaściwy). Stosujemy następujące oznaczenie:

$\mathrm{P}(P, Q) =$ pęk płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$ wyznaczony przez płaszczyzny P, Q.

Twierdzenie. (**O pęku płaszczyzn w** $\mathbb{R}^3$)

$P : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0,\ Q : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0,\ P \neq Q$

Wtedy

$$R \in \mathrm{P}(P, Q) \Leftrightarrow \bigvee_{\eta,\lambda\in\mathbb{R},\, \eta^2+\lambda^2>0} R : \eta(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + \lambda(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) = 0.$$

Dowód. Analogiczny jak w przypadku pęku prostych w $\mathbb{R}^2$. $\square$

Uwaga. Równoważnie mamy

$$R \in \mathrm{P}(P, Q) \Leftrightarrow \bigvee_{\lambda\in\mathbb{R}} R : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \lambda(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) = 0$$

(w tym przypadku nie istnieje λ takie, że $R = Q$).

Uwaga. $P, Q \subseteq \mathbb{R}^3$ – płaszczyzny, $P \nparallel Q$

Wtedy $P \cap Q = L$ jest prostą. Jeśli $P : \alpha_0+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3 = 0$, $Q : \beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\beta_3 x_3 = 0$, to

$$L : \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \\ \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Jest to *równanie krawędziowe* prostej L w $\mathbb{R}^3$. Wtedy $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \perp L$ i $\mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] \perp L$. Stąd $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \parallel L$.

Definicja. $L \subseteq \mathbb{R}^3$ – prosta, $P \subseteq \mathbb{R}^3$ – płaszczyzna, $a \in \mathbb{R}^3$

$$\rho(a, L) \underset{df}{=} \rho(a, b),\ \text{gdzie } b \in L \cap P \text{ i } a \in P \perp L$$

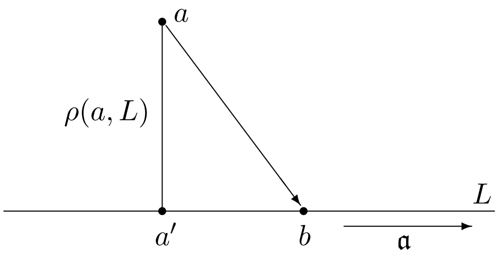
(odległość punktu a od prostej L w $\mathbb{R}^3$).

Twierdzenie. $L \subseteq \mathbb{R}^3$ – prosta, $\mathfrak{a}, a, b \in \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{a} \parallel L$, $a \neq b$, $b \in L$

Wtedy

$$\rho(a, L) = \frac{\left|\mathfrak{a} \times \left[\overrightarrow{ab}\right]\right|}{|\mathfrak{a}|}.$$

Dowód. Mamy



Stąd $\sin\left(\sphericalangle\left(\mathfrak{a}, \left[\overrightarrow{ab}\right]\right)\right) = \frac{\rho(a,a')}{\rho(a,b)}$ oraz

$$\begin{aligned}\rho(a, L) = \rho(a, a') &= \rho(a, b) \sin\left(\sphericalangle\left(\mathfrak{a}, \left[\overrightarrow{ab}\right]\right)\right)\\ &= \frac{|\mathfrak{a}| \left|\left[\overrightarrow{ab}\right]\right| \sin\left(\sphericalangle\left(\mathfrak{a}, \left[\overrightarrow{ab}\right]\right)\right)}{|\mathfrak{a}|}\\ &= \frac{\left|\mathfrak{a} \times \left[\overrightarrow{ab}\right]\right|}{|\mathfrak{a}|}. \quad \square\end{aligned}$$

Definicja. $k < n$

Hiperpłaszczyzna k-wymiarowa w $\mathbb{R}^n \underset{df}{=}$ podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$ izometryczna z $\mathbb{R}^k$.

Definicja. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, a, b \in \mathbb{R}^n$, $\quad H^{n-1}$ – hiperpłaszczyzna $(n-1)$-wymiarowa w $\mathbb{R}^n$

$$\mathfrak{a} \parallel H^{n-1} \underset{df}{\Leftrightarrow} \bigvee_{\overrightarrow{ab}} \overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a} \ \wedge \ a, b \in H^{n-1} \ \Leftrightarrow \bigvee_{a,b \in H^{n-1}} \overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}.$$

$$\mathfrak{b} \perp H^{n-1} \underset{df}{\Leftrightarrow} \bigwedge_{\mathfrak{a} \parallel H^{n-1}} \mathfrak{b} \perp \mathfrak{a}.$$

Twierdzenie. Dla każdego punktu $a \in \mathbb{R}^n$ i każdego niezerowego wektora $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ istnieje w $\mathbb{R}^n$ dokładnie jedna hiperpłaszczyzna H^{n-1} taka, że $a \in H^{n-1}$ i $\mathfrak{a} \perp H^{n-1}$. Składa się ona z wszystkich punktów $(x_1, \ldots, x_n)$ spełniających równanie

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0, \text{ gdzie } \alpha_0 = -a \cdot (\mathfrak{a}).$$

Jest to równanie liniowe hiperpłaszczyzny H^{n-1} takiej, że $a \in H^{n-1}$ i $\mathfrak{a} \perp H^{n-1}$.

Dowód. Podobny do dowodu twierdzenia o równaniu liniowym prostej. $\square$

Rozdział 7

Przekształcenia przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Przypomnijmy, że izometrią nazywa się przekształcenie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takie, że f jest na i

$$\bigwedge_{x,y\in\mathbb{R}^n} \rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$$

Definicja.

Niezmiennik izometrii $\underset{df}{=}$ własność, która nie zmienia się przy izometriach.

Twierdzenie. Środek odcinka jest niezmiennikiem izometrii (tzn., jeśli c jest środkiem odcinka $\langle a, b\rangle$, to $f(c)$ jest środkiem odcinka $\langle f(a), f(b)\rangle$).

Dowód. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – izometria, $a, b, c \in \mathbb{R}^n$

Jeśli c jest środkiem odcinka $\langle a, b\rangle$, to

$$\rho(a, c) = \rho(b, c) = \frac{1}{2}\rho(a, b).$$

Stąd

$$\rho(f(a), f(c)) = \rho(f(b), f(c)) = \frac{1}{2}\rho(f(a), f(b)),$$

czyli $f(c)$ jest środkiem odcinka $\langle f(a), f(b)\rangle$. $\square$

Twierdzenie. Równość wektorów związanych jest niezmiennikiem izometrii.

Dowód. Wynika z definicji wektorów równych oraz poprzedniego twierdzenia. $\square$

Wniosek. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – izometria, $\mathfrak{a}, a, b \in \mathbb{R}^n$

Wtedy

$$\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a} \;\Rightarrow\; f(\mathfrak{a}) = \left[\overrightarrow{f(a)f(b)}\right].$$

Twierdzenie. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – izometria, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$

Wtedy

1) $f(0) = 0$ (dla wektorów!),
2) $f(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b})$,
3) $f(-\mathfrak{a}) = -f(\mathfrak{a})$,
4) $f(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}) - f(\mathfrak{b})$,
5) $|f(\mathfrak{a})| = |\mathfrak{a}|$.

Dowód. 1) Oczywiste.

2) $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}$ and $\overrightarrow{bc} \in \mathfrak{b}$ z Twierdzenia o zaczepianiu wektora swobodnego w punkcie.

Wtedy $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac} \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

Stąd $\overrightarrow{f(a)f(c)} \in f(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ oraz $\overrightarrow{f(a)f(c)} = \overrightarrow{f(a)f(b)} + \overrightarrow{f(b)f(c)} \in f(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b})$.

Zatem $f(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b})$.

3) $0 = f(0) = f(\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a})) = f(\mathfrak{a}) + f(-\mathfrak{a})$. Stąd $f(-\mathfrak{a}) = -f(\mathfrak{a})$.

4) $f(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a} + (-\mathfrak{b})) = f(\mathfrak{a}) + f(-\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}) - f(\mathfrak{b})$.

5) $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}$

$$|f(\mathfrak{a})| = \left| \left[\overrightarrow{f(a)f(b)} \right] \right| = \rho(f(a), f(b)) = \rho(a, b) = \left| \left[\overrightarrow{ab} \right] \right| = |\mathfrak{a}| . \quad \square$$

Wniosek. Wektor zerowy, wektor przeciwny, suma i różnica wektorów i długość wektora są niezmiennikami izometrii.

Twierdzenie. Równoległość, równoległość zgodna i równoległość przeciwna wektorów są niezmiennikami izometrii.

Dowód. Wynika z definicji równoległości i poprzedniego twierdzenia. $\square$

Wniosek. Kierunek i zwrot wektora są niezmiennikami izometrii, tzn., dla $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\mathcal{K}(\mathfrak{a})) = \mathcal{K}(f(\mathfrak{a})) \quad \text{oraz}$$
$$f(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) = \mathcal{Z}(f(\mathfrak{a})).$$

Twierdzenie. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – izometria, $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

Wtedy

$$f(t\mathfrak{a}) = tf(\mathfrak{a}).$$

Dowód. Załóżmy, że $t \geqslant 0$. Wtedy $t\mathfrak{a} \upharpoonleft\upharpoonright \mathfrak{a}$, skąd $f(t\mathfrak{a}) \upharpoonleft\upharpoonright f(\mathfrak{a})$ i $tf(\mathfrak{a}) \upharpoonleft\upharpoonright f(\mathfrak{a})$. Zatem

$$f(t\mathfrak{a}) \upharpoonleft\upharpoonright tf(\mathfrak{a})$$

Ponadto

$$|f(t\mathfrak{a})| = |t\mathfrak{a}| = t\,|\mathfrak{a}| = t\,|f(\mathfrak{a})|\,.$$

Stąd $f(t\mathfrak{a}) = tf(\mathfrak{a})$.

Podobnie dla $t < 0$ (w tym przypadku równoległość jest przeciwna). $\square$

Wniosek. Kombinacja liniowa wektorów jest niezmiennikiem izometrii, tzn.,

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} t_i \mathfrak{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} t_i f(\mathfrak{a}_i),$$

gdzie $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k \in \mathbb{R}^n$ i $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie. Iloczyn skalarny wektorów jest niezmiennikiem izometrii, tzn., $f(\mathfrak{a}) \cdot f(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$.

Dowód. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – izometria, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$

Mamy

$$(f(\mathfrak{a})+f(\mathfrak{b}))^2 = (f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}))^2 = |f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})|^2 = |\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|^2 = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2 = \mathfrak{a}^2+2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}+\mathfrak{b}^2 = |\mathfrak{a}|^2+2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}+|\mathfrak{b}|^2$$

oraz

$$(f(\mathfrak{a})+f(\mathfrak{b}))^2 = (f(\mathfrak{a}))^2+2f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b})+(f(\mathfrak{b}))^2 = |f(\mathfrak{a})|^2+2f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b})+|f(\mathfrak{b})|^2 = |\mathfrak{a}|^2+2f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b})+|\mathfrak{b}|^2\,.$$

Stąd $|\mathfrak{a}|^2 + 2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} + |\mathfrak{b}|^2 = |\mathfrak{a}|^2 + 2f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b}) + |\mathfrak{b}|^2$.

Zatem

$$f(\mathfrak{a}) \cdot f(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}. \;\square$$

Wniosek. Prostopadłość wektorów jest niezmiennikiem izometrii.

Wniosek. Cosinus kąta między wektorami oraz miara kąta między wektorami są niezmiennikami izometrii.

Twierdzenie. Hiperpłaszczyzna k-wymiarowa w $\mathbb{R}^n$ $(k < n)$ jest niezmiennikiem izometrii, tzn., jeśli H^k jest hiperpłaszczyzną k-wymiarową, to $f(H^k)$ jest hiperpłaszczyzną k-wymiarową.

Dowód. Wynika z definicji hiperpłaszczyzny k-wymiarowej oraz faktu, że superpozycja izometrii jest izometrią. $\square$

Wniosek. Prosta oraz płaszczyzna w $\mathbb{R}^n$ są niezmiennikami izometrii.

Wniosek. Pęk prostych w $\mathbb{R}^2$ oraz pęk płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$ są niezmiennikami izometrii.

Twierdzenie. Równoległość i prostopadłość prostych w $\mathbb{R}^n$ oraz równoległość i prostopadłość płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$ są niezmiennikami izometrii.

Dowód. Wynika z faktu, że równoległość i prostopadłość wektorów są niezmiennikami izometrii. $\square$

Uwaga. Przyjmijmy:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{jeśli} \quad i = j. \end{cases}$$

Twierdzenie. (**O analitycznej postaci izometrii**) Każda izometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem określonym wzorem

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i), \text{ gdzie } \mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j = \delta^i_j.$$

Wówczas $f(0) = a$ i $\mathfrak{a}_i = f(\mathfrak{e}_i)$, gdzie $\mathfrak{e}_i = [\delta^i_1, \delta^i_2, \ldots, \delta^i_n]$, $i = 1, \ldots, n$.

Dowód. Zauważmy, że $\mathfrak{e}_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0], \mathfrak{e}_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0], \ldots, \mathfrak{e}_n = [0, 0, 0, \ldots, 1]$. Z własności izometrii wiemy, że izometria jest przekształceniem liniowym. Stąd każda izometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest jednoznacznie wyznaczona przez jej wartości $f(\mathfrak{e}_1), \ldots, f(\mathfrak{e}_n)$ w końcach wektorów $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$.

Teraz, jeśli $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, to $x = 0 + x_1\mathfrak{e}_1 + \ldots + x_n\mathfrak{e}_n$, skąd $f(x) = f(0) + x_1 f(\mathfrak{e}_1) + \ldots + x_n f(\mathfrak{e}_n)$. Przyjmując $f(0) = a$ oraz $f(\mathfrak{e}_i) = \mathfrak{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$ mamy $\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j = \delta^i_j$ oraz

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i). \quad \square$$

Przypomnijmy teraz, że podobieństwem o współczynniku $\lambda > 0$ nazywa się przekształcenie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takie, że f jest na oraz

$$\bigwedge_{x,y \in \mathbb{R}^n} \rho(f(x), f(y)) = \lambda \rho(x, y)$$

Definicja.

Niezmiennik podobieństw $\underset{df}{=}$ własność, która nie zmienia się przy podobieństwach.

Uwaga. Każdy niezmiennik podobieństw jest niezmiennikiem izometrii (ponieważ izometria jest podobieństwem o współczynniku 1). Niezmiennik izometrii jest niezmiennikiem podobieństw $\Leftrightarrow$ nie zależy od odległości między punktami w $\mathbb{R}^n$. Stąd mamy:

Twierdzenie. Niezmiennikami podobieństw są: środek odcinka, równość wektorów związanych, wektor zerowy, wektor przeciwny, suma i różnica wektorów, równoległość, równoległość zgodna i równoległość przeciwna wektorów, kierunek i zwrot wektora, kombinacja liniowa wektorów, hiperpłaszczyzna k-wymiarowa w $\mathbb{R}^n$, prosta w $\mathbb{R}^n$, płaszczyzna w $\mathbb{R}^n$, równoległość i prostopadłość prostych w $\mathbb{R}^n$ oraz równoległość i prostopadłość płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$, pęk prostych w $\mathbb{R}^2$ oraz pęk płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$.

Wniosek. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – podobieństwo, $\mathfrak{a}, a, b \in \mathbb{R}^n$

Wtedy
$$\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a} \;\Rightarrow\; f(\mathfrak{a}) = \left[\overrightarrow{f(a)f(b)}\right].$$

Twierdzenie. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – podobieństwo o współczynniku $\lambda > 0$, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$

Wtedy

1) $|f(\mathfrak{a})| = \lambda\,|\mathfrak{a}|$,
2) $f(\mathfrak{a}) \cdot f(\mathfrak{b}) = \lambda^2(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$.

Dowód. 1) $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}$

$$|f(\mathfrak{a})| = \left|\left[\overrightarrow{f(a)f(b)}\right]\right| = \rho(f(a), f(b)) = \lambda\rho(a, b) = \lambda\left|\left[\overrightarrow{ab}\right]\right| = \lambda\,|\mathfrak{a}|\,.$$

2) $f(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$

Stąd

$$(f(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b}))^2 = (f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}))^2 = |f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})|^2 = \lambda^2\,|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|^2 = \lambda^2(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2 = \lambda^2\,|\mathfrak{a}|^2 + 2\lambda^2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} + \lambda^2\,|\mathfrak{b}|^2$$

oraz

$$\begin{aligned}(f(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b}))^2 &= (f(\mathfrak{a}))^2 + 2f(\mathfrak{a}) \cdot f(\mathfrak{b}) + (f(\mathfrak{b}))^2 \\ &= |f(\mathfrak{a})|^2 + 2f(\mathfrak{a}) \cdot f(\mathfrak{b}) + |f(\mathfrak{b})|^2 \\ &= \lambda^2\,|\mathfrak{a}|^2 + 2f(\mathfrak{a}) \cdot f(\mathfrak{b}) + \lambda^2\,|\mathfrak{b}|^2\,.\end{aligned}$$

Zatem
$$f(\mathfrak{a}) \cdot f(\mathfrak{b}) = \lambda^2\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}. \;\square$$

Wniosek. Długość wektora oraz iloczyn skalarny wektorów nie są niezmiennikami podobieństw.

Twierdzenie. Cosinus kąta między wektorami jest niezmiennikiem podobieństw.

Dowód. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – podobieństwo o współczynniku $\lambda > 0$, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$

Z poprzedniego twierdzenia mamy

$$f(\mathfrak{a}) \cdot f(\mathfrak{b}) = |f(\mathfrak{a})|\,|f(\mathfrak{b})| \cos(\sphericalangle(f(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{b}))) = \lambda^2\,|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \cos(\sphericalangle(f(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{b})))$$

oraz
$$\lambda^2(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = \lambda^2\,|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})),$$

czyli
$$\cos(\sphericalangle(f(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{b}))) = \cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})). \;\square$$

Wniosek. Miara kąta między wektorami, w szczególności, prostopadłość wektorów są niezmiennikami podobieństw.

Twierdzenie. (**O analitycznej postaci podobieństwa**) Każde podobieństwo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o współczynniku $\lambda > 0$ jest przekształceniem określonym wzorem

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i), \text{ gdzie } \mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j = \lambda^2 \delta^i_j.$$

Wówczas $f(0) = a$ i $\mathfrak{a}_i = f(\mathfrak{e}_i)$, gdzie $\mathfrak{e}_i = [\delta^i_1, \delta^i_2, \dots, \delta^i_n]$, $i = 1, \dots, n$.

Dowód. Mamy $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takie, że $g(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$, gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, jest izometrią, bo

$$\rho(g(x), g(y))^2 = [g(y) - g(x)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}[f(y) - f(x)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}\rho(f(x), f(y))^2 = \rho(x, y)^2,$$

czyli $\rho(g(x), g(y)) = \rho(x, y)$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Z twierdzenia o analitycznej postaci izometrii

$$g(x) = b + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{b}_i),$$

gdzie $\mathfrak{b}_i \cdot \mathfrak{b}_j = \delta^i_j$, $g(0) = b$, $\mathfrak{b}_i = g(\mathfrak{e}_i)$ i $\mathfrak{e}_i = [\delta^i_1, \delta^i_2, \dots, \delta^i_n]$. Stąd

$$f(x) = \lambda g(x) = \lambda b + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\lambda \mathfrak{b}_i).$$

Przyjmując $a = \lambda b$ i $\mathfrak{a}_i = \lambda \mathfrak{b}_i$, $i = 1, \dots, n$ mamy

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i)$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j &= (\lambda \mathfrak{b}_i) \cdot (\lambda \mathfrak{b}_j) = \lambda^2 (\mathfrak{b}_i \cdot \mathfrak{b}_j) = \lambda^2 \delta^i_j, \\ f(0) &= \lambda g(0) = \lambda b = a, \\ \mathfrak{a}_i &= \lambda \mathfrak{b}_i = \lambda g(\mathfrak{e}_i) = f(\mathfrak{e}_i), \end{aligned}$$

gdzie $\mathfrak{e}_i = [\delta^i_1, \delta^i_2, \dots, \delta^i_n]$, $i = 1, \dots, n$. $\square$

Definicja. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

f jest *przekształceniem afinicznym* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ 1) $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow[1-1]{na} \mathbb{R}^n$,

2) $\bigwedge_{a,b,a',b' \in \mathbb{R}^n} \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'} \ \Rightarrow \ \overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{f(a')f(b')}$,

3) $\bigwedge_{\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2 \in \mathbb{R}^n} \ \bigwedge_{t_1,t_2 \in \mathbb{R}} f(t_1\mathfrak{a}_1 + t_2\mathfrak{a}_2) = t_1 f(\mathfrak{a}_1) + t_2 f(\mathfrak{a}_2)$.

Wniosek. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – przekształcenie afiniczne, $\mathfrak{a}, a, b \in \mathbb{R}^n$

Wtedy

$$\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a} \ \Rightarrow \ f(\mathfrak{a}) = \left[\overrightarrow{f(a)f(b)}\right].$$

Wniosek. Każda izometria oraz każde podobieństwo są przekształceniami afinicznymi.

Definicja. $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k \in \mathbb{R}^n$, $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$

Wektory $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ są *liniowo niezależne* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$

$$\sum_{i=1}^{k} t_i \mathfrak{a}_i = 0 \ \Rightarrow \ t_1 = t_2 = \ldots = t_k = 0.$$

Twierdzenie. (**O analitycznej postaci przekształcenia afinicznego**) Każde przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem określonym wzorem

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i),$$

gdzie wektory $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ są liniowo niezależne. Wówczas $f(0) = a$ i $\mathfrak{a}_i = f(\mathfrak{e}_i)$, gdzie $\mathfrak{e}_i = [\delta_1^i, \delta_2^i, \ldots, \delta_n^i]$, $i = 1, \ldots, n$.

Dowód. Dla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mamy $x = 0 + x_1 \cdot (\mathfrak{e}_1) + \ldots + x_n \cdot (\mathfrak{e}_n)$.

Z definicji przekształcenia afinicznego

$$f(x) = f(0) + x_1 \cdot f(\mathfrak{e}_1) + \ldots + x_n \cdot f(\mathfrak{e}_n).$$

Przyjmijmy: $f(0) = a$ i $f(\mathfrak{e}_i) = \mathfrak{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Wtedy

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i)$$

oraz z wzajemnej jednoznaczności przekształcenia f:

$$\begin{aligned} f(x) = f(0) \ &\Rightarrow \ x = 0, \\ \text{czyli} \ \ a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i) = a \ &\Rightarrow \ x_1 = \ldots = x_n = 0, \\ \text{skąd} \ \ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i) = 0 \ &\Rightarrow \ x_1 = \ldots = x_n = 0. \end{aligned}$$

Zatem wektory $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ są liniowo niezależne. □

Twierdzenie. Superpozycja dwu przekształceń afinicznych jest przekształceniem afinicznym.

Dowód. Łatwy. □

Twierdzenie. Jeżeli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem afinicznym, to $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem afinicznym.

Dowód. Łatwy. □

Definicja.

Niezmiennik afiniczny $\underset{df}{=}$ własność, która nie zmienia się przy przekształceniach afinicznych.

Wniosek. Niezmiennikami afinicznymi są: równość wektorów związanych, kombinacja liniowa wektorów i równoległość wektorów.

Twierdzenie. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – przekształcenie afiniczne, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

Wtedy

$$f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b).$$

Dowód. Łatwy. Wystarczy zastosować analityczną postać przekształcenia afinicznego. □

Wniosek. Środek odcinka jest niezmiennikiem afinicznym.

Wniosek. Prosta w $\mathbb{R}^n$ jest niezmiennikiem afinicznym.

Wniosek. Płaszczyzna w $\mathbb{R}^n$ i hiperpłaszczyzna k-wymiarowa w $\mathbb{R}^n$ są niezmiennikami afinicznymi (bo są sumami prostych).

Wniosek. Równoległość prostych w $\mathbb{R}^n$ i równoległość płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$ są niezmiennikami afinicznymi.

Uwaga. Każdy niezmiennik afiniczny jest niezmiennikiem podobieństw (co oznacza, że jeśli jakaś własność nie jest niezmiennikiem podobieństw, to nie jest ona również niezmiennikiem afinicznym).

Wniosek. Długość wektora oraz iloczyn skalarny wektorów nie są niezmiennikami afinicznymi.

Wniosek. Cosinus kąta między wektorami, miara kąta między wektorami, w szczególności, prostopadłość wektorów nie są niezmiennikami afinicznymi.

Wniosek. Każdy niezmiennik afiniczny jest niezmiennikiem podobieństw, a każdy niezmiennik podobieństw jest niezmiennikiem izometrii.

Definicja. $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Macierz A nazywa się *ortogonalna* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ kolumny macierzy A są wzajemnie prostopadłymi wersorami w $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie. $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Następujące warunki są równoważne:

1) A jest ortogonalna,
2) $A^T A = I$,
3) $A^{-1} = A^T$.

Dowód. Łatwy. $\square$

Wniosek. $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ – macierze ortogonalne

Wtedy

1) $\det(A) = \pm 1$,
2) A^T jest ortogonalna,
3) wiersze macierzy A są wzajemnie prostopadłymi wersorami w $\mathbb{R}^n$,
4) A^{-1} jest ortogonalna,
5) AB jest ortogonalna.

Definicja. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – izometria (podobieństwo, przekształcenie afiniczne)

$a = (a_{01}, \ldots, a_{0n}), \mathfrak{a}_i = [\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}] \in \mathbb{R}^n, \;\; i = 1, \ldots, n \;\; (x_1, \ldots, x_n), (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \in \mathbb{R}^n$

Wtedy

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i),$$

czyli

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = (a_{01}, \ldots, a_{0n}) + x_1[\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}] + \ldots + x_n[\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}],$$

skąd

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = a_{01} + \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{n1}x_n \\ \overline{x}_2 = a_{02} + \alpha_{12}x_1 + \ldots + \alpha_{n2}x_n \\ \quad \vdots \\ \overline{x}_n = a_{0n} + \alpha_{1n}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n \end{cases}$$

Macierz

$$A_f \underset{df}{=} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywa się *macierzą izometrii* (*podobieństwa*, *przekształcenia afinicznego*) f.

Twierdzenie. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Przekształcenie f dane powyższym wzorem analitycznym jest:

1) przekształceniem afinicznym $\Leftrightarrow A_f$ jest nieosobliwa,
2) podobieństwem o współczynniku $\lambda > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} A_f$ jest ortogonalna,
3) izometrią $\Leftrightarrow A_f$ jest ortogonalna.

Dowód. Wynika z twierdzeń o analitycznych postaciach tych przekształceń. $\square$

Rozdział 8

Zbiory algebraiczne w przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Definicja. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \;\; x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \;\; i_1, \ldots, i_n \in \{0, \ldots, k\}, \;\; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

φ jest *jednomianem n zmiennych* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ $\varphi(x) = \alpha_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$.

Stopień jednomianu $\varphi \underset{df}{=} i_1 + \ldots + i_n$.

φ jest *wielomianem n zmiennych* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ φ jest sumą jednomianów.

Stopień wielomian $\varphi \underset{df}{=}$ największy ze stopni jednomianów składających się na wielomian φ.

Przykład.
1. $\varphi(x) = 2x_1^2 x_2^3$ jest jednomianem stopnia 5 dwu zmiennych.
2. $\varphi(x) = x_1^2 x_2 + 2x_2^2 x_3^2 - 3x_1 x_3 + 5x_1 - 4$ jest wielomianem stopnia 4 trzech zmiennych.

Definicja. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – wielomian stopnia k

Równanie $\varphi(x) = 0$ nazywa się *równaniem algebraicznym* stopnia k.

Definicja. (**Zbiór algebraiczny w** $\mathbb{R}^n$)

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – wielomian, $\;\varphi(x) = 0$ – równanie algebraiczne

Zbiór algebraiczny $\underset{df}{=}$ zbiór rozwiązań równania algebraicznego,

tzn., jeśli $F \subseteq \mathbb{R}^n$, to

F jest zbiorem algebraicznym $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ [istnieje wielomian $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taki, że $x \in F \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$].

Będziemy pisać $F : \varphi(x) = 0$.

Stopień zbioru $F \underset{df}{=}$ najmniejszy ze stopni równań algebraicznych opisujących zbiór F.

Oznaczamy $\deg(F)$.

Uwagi.
1. Zbiory algebraiczne stopnia 0 w $\mathbb{R}^n$: $\emptyset$ i $\mathbb{R}^n$ (bo dla wielomianu φ stopnia 0 równanie $\varphi(x) = 0$ jest albo sprzeczne albo jest tożsamością).

2. Zbiory algebraiczne stopnia 1 w $\mathbb{R}^n$: hiperpłaszczyzny $(n-1)$-wymiarowe (jeśli $H^{n-1} : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$, to $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ jest równaniem algebraicznym stopnia 1).
3. Zbiory algebraiczne stopnia 2 w $\mathbb{R}^1$: zbiory 2-punktowe (bo wielomian stopnia 2 jednej zmiennej ma co najwyżej 2 pierwiastki).
4. Zbiory algebraiczne stopnia k w $\mathbb{R}^1$: zbiory k-punktowe (bo wielomian stopnia k jednej zmiennej ma co najwyżej k pierwiastków).

Wniosek. Prosta w $\mathbb{R}^2$ i płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$ są zbiorami algebraicznymi stopnia 1.

Twierdzenie. (**O położeniu prostej względem zbioru algebraicznego stopnia** k)

$L, F \subseteq \mathbb{R}^n$, L – prosta, F – zbiór algebraiczny stopnia k

Wtedy

$$L \subseteq F \quad \vee \quad \overline{\overline{L \cap F}} \leqslant k.$$

Dowód. $F : \varphi(x) = 0$, φ – wielomian stopnia k

Z twierdzenia o prostej: $L : x(t) = (1-t)a + tb$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ i $a, b \in L$, czyli $L : (x_1, \ldots, x_n) = a + (b-a)t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ i $a, b \in L$.

Szukamy wszystkich $t \in \mathbb{R}$ spełniających układ równań

$$\begin{cases} (x_1, \ldots, x_n) = a + (b-a)t, \\ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Nietrudno jest zobaczyć, że takie t nie istnieją albo wszystkie $t \in \mathbb{R}$ spełniają ten układ albo co najwyżej k liczb t spełnia ten układ. Stąd

$$L \cap F = \emptyset \quad \vee \quad L \cap F = L \quad \vee \quad \overline{\overline{L \cap F}} \leqslant \overline{\overline{\{t_1, \ldots, t_k\}}}.$$

Zatem

$$L \subseteq F \quad \vee \quad \overline{\overline{L \cap F}} \leqslant k. \quad \square$$

Definicja.

Zbiór przestępny $\underset{df}{=}$ podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nie będący zbiorem algebraicznym żadnego stopnia.

Wniosek. Jeżeli dla $F \subseteq \mathbb{R}^n$ istnieje prosta L taka, że $L \cap F$ jest podzbiorem właściwym nieskończonym prostej L, to zbiór F jest przestępny.

Przykład. Sinusoida jest zbiorem przestępnym.

Twierdzenie. Zbiór algebraiczny i jego stopień są niezmiennikami afinicznymi.

Dowód. $F : \varphi(x) = 0$ – zbiór algebraiczny stopnia k, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – przekształcenie afiniczne

Wtedy f^{-1} również jest przekształceniem afinicznym. Jeśli $f(x_1, \ldots, x_n) = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$, to $f^{-1}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = (x_1, \ldots, x_n)$. Z postaci analitycznej przekształcenia afinicznego f^{-1} mamy wzory na $x_1, \ldots, x_n$. Podstawiamy je do równania $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ i otrzymujemy równanie algebraiczne stopnia k zbioru algebraicznego $\overline{F}$, czyli $f(F) = \overline{F}$. $\square$

Wniosek. Zbiór algebraiczny i jego stopień są niezmiennikami podobieństw i izometrii.

Wniosek. Zbiór przestępny jest niezmiennikiem afinicznym (a więc również podobieństw i izometrii).

Definicja. $a, a' \in \mathbb{R}^n$, $H \subseteq \mathbb{R}^n$ – hiperpłaszczyzna

a, a' są *symetryczne względem* $H \underset{df}{\Leftrightarrow}$

$$c = \frac{a + a'}{2} \in H \ \wedge \ \left[\overrightarrow{aa'}\right] \perp H.$$

Definicja. $F, H \subseteq \mathbb{R}^n$, F – zbiór algebraiczny, H – hiperpłaszczyzna

H jest *hiperpłaszczyzną symetrii zbioru* $F \underset{df}{\Leftrightarrow}$

$$[a \in F \ \Rightarrow \ a' \in F, \text{ gdzie } a' \text{ jest punktem symetrycznym do } a \text{ względem } H].$$

Uwagi.
1. 0-wymiarowa hiperpłaszczyzna symetrii redukuje się do punktu, nazywanego *środkiem symetrii* zbioru F.
2. 1-wymiarowa hiperpłaszczyzna symetrii jest prostą, nazywaną *osią symetrii* zbioru F.

Twierdzenie. Środek symetrii zbioru algebraicznego jest niezmiennikiem afinicznym.

Dowód. Wynika wprost z definicji. $\square$

Uwaga. Oś symetrii zbioru algebraicznego nie jest niezmiennikiem afinicznym.

Zbiory algebraiczne stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$:

1. Zbiór 1-punktowy.

$a = (a_1, a_2), x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Wtedy

$$\{a\} : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = 0$$

oraz $\varphi(x) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2$ jest wielomianem stopnia 2, czyli $\deg(\{a\}) = 2$.

2. Suma dwu różnych prostych.

$L, K \subseteq \mathbb{R}^2$ – proste, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$L : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0, \quad K : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0$$

Wtedy

$$\begin{aligned} x \in L \cup K \ &\Leftrightarrow\ \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0 \ \vee\ \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) = 0. \end{aligned}$$

Zatem

$$L \cup K : (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) = 0$$

oraz $\varphi(x) = (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)$ jest wielomianem stopnia 2, czyli $\deg(L \cup K) = 2$.

3. Okrąg.

$a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ – środek, $r > 0$ – promień, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Okrąg jest zbiorem zdefiniowanym następująco:

$$S = S(a, r) \underset{df}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, a) = r\}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} x \in S \ &\Leftrightarrow\ \rho(x, a) = r \ \Leftrightarrow\ [\rho(x, a)]^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow\ (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2. \end{aligned}$$

Zatem

$$S : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 - r^2 = 0$$

oraz $\varphi(x) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 - r^2$ jest wielomianem stopnia 2, czyli $\deg(S) = 2$.

4. Stożkowa.

Definicja. (**Stożkowa**)

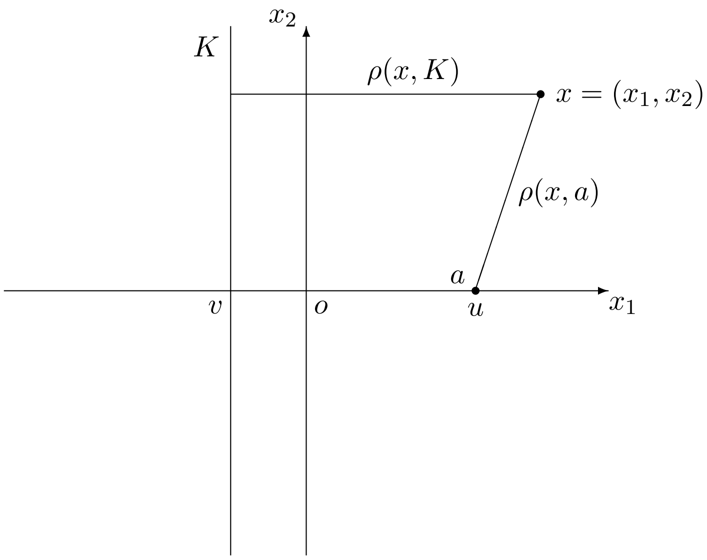
$a \in \mathbb{R}^2$, $K \subseteq \mathbb{R}^2$ – prosta, $a \notin K$, $e > 0$

Zbiór

$$S(a, K, e) \underset{df}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, a) = e \cdot \rho(x, K)\}$$

nazywa się *stożkowa*. Wtedy, a – ognisko, K – kierownica, e – mimośród.

Weźmy taki układ współrzędnych, żeby oś x_1 przechodziła przez ognisko a i była prostopadła do kierownicy K, czyli $a = (u, 0)$, $K : x_1 - v = 0$ i $|u - v| = d$:



Wtedy

$$\rho(x, a) = e \cdot \rho(x, K) \;\Leftrightarrow\; [\rho(x, a)]^2 = e^2 \cdot [\rho(x, K)]^2,$$

czyli

$$(x_1 - u)^2 + x_2^2 = e^2(x_1 - v)^2.$$

Stąd

$$S(a, K, e) : (1 - e^2)x_1^2 + x_2^2 + 2(e^2v - u)x_1 + (u^2 - e^2v^2) = 0$$

i $\varphi(x) = (1 - e^2)x_1^2 + x_2^2 + 2(e^2v - u)x_1 + (u^2 - e^2v^2)$ jest wielomianem stopnia 2, czyli $\deg(S(a, K, e)) = 2$.

Twierdzenie. Stożkowa, jej ognisko, kierownica i mimośród są niezmiennikami izometrii.

Dowód. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – izometria

$S(a, K, e) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, a) = e \cdot \rho(x, K)\}$ – stożkowa, a – ognisko, K – kierownica, e – mimośród

Wówczas $f(K)$ jest prostą oraz

$$\rho(f(x), f(a)) = \rho(x, a) = e \cdot \rho(x, K) = e \cdot \rho(f(x), f(K)).$$

Stąd

$$f(S(a,K,e)) = S(f(a), f(K), e) = \{y = f(x) \in \mathbb{R}^2 : \rho(y, f(a)) = e \cdot \rho(y, f(K))\}$$

jest stożkową mającą ognisko $f(a)$, kierownicę $f(K)$ oraz mimośród e. $\square$

Ćwiczenie. Pokazać, że stożkowa, jej ognisko, kierownica i mimośród są niezmiennikami podobieństw.

Definicja.

$$\text{Stożkowa } S(a,K,e) \text{ jest} : \begin{aligned} &1)\ \textit{elipsą},\ \text{gdy } e < 1,\\ &2)\ \textit{parabolą},\ \text{gdy } e = 1,\\ &3)\ \textit{hiperbolą},\ \text{gdy } e > 1. \end{aligned}$$

Wiemy, że $a = (u, 0)$, $K : x_1 - v = 0$, $|u - v| = d$ oraz

$$S(a,K,e) : (1 - e^2)x_1^2 + x_2^2 + 2(e^2v - u)x_1 + (u^2 - e^2v^2) = 0.$$

Parabola P:

$e = 1$, niech $u = \frac{1}{2}d$ i $v = -\frac{1}{2}d$

Wtedy

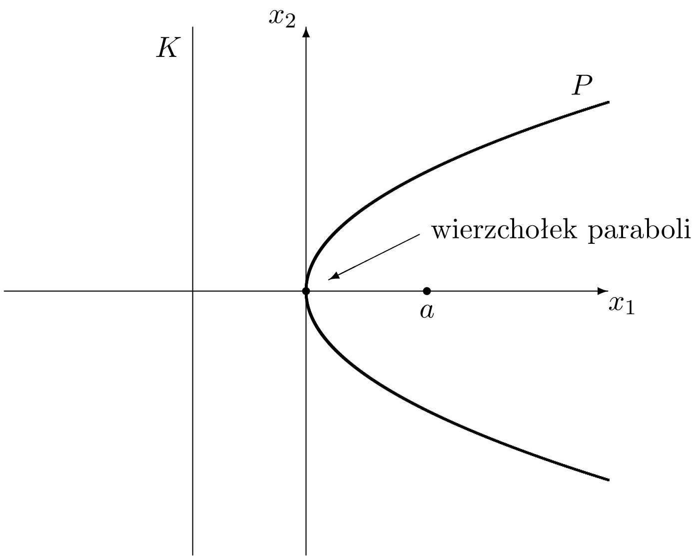
$$P : x_2^2 + 2(v - u)x_1 + (u^2 - v^2) = 0,$$

czyli

$$P : x_2^2 - 2dx_1 = 0.$$

Jest to *równanie kanoniczne paraboli.*

Łatwo widać, że parabola ma jedną oś symetrii: w położeniu kanonicznym oś x_1; nie ma środków symetrii; ma wierzchołek, czyli punkt przecięcia paraboli z osią symetrii: w położeniu kanonicznym punkt $(0, 0)$; ma jedno ognisko: w położeniu kanonicznym $a = (\frac{d}{2}, 0)$ i ma jedną kierownicę: w położeniu kanonicznym $K : x_1 + \frac{d}{2} = 0$.



Elipsa E:

$e < 1$, niech $v - u = d$ i $u - e^2 v = 0$

Stąd

$$u = \frac{e^2 d}{1 - e^2}, \quad v = \frac{d}{1 - e^2} \quad \text{i} \quad u, v > 0.$$

Wtedy

$$u^2 - e^2 v^2 = \frac{(e^2 d)^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} = -ud.$$

Zatem

$$E : \frac{(1 - e^2) x_1^2}{ud} + \frac{x_2^2}{ud} = 1.$$

Przyjmijmy: $\alpha_1 = \sqrt{\frac{ud}{1 - e^2}}$ i $\alpha_2 = \sqrt{ud}$, przy czym

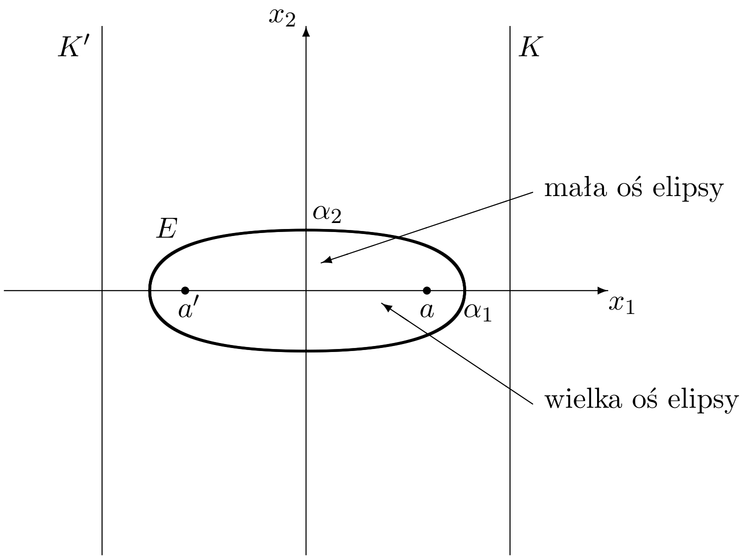
$$\alpha_1 = \frac{ed}{1 - e^2} > 0, \quad \alpha_2 = \frac{ed}{\sqrt{1 - e^2}} = \alpha_1 \sqrt{1 - e^2} < \alpha_1.$$

Wtedy

$$E : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Jest to *równanie kanoniczne elipsy.*

Łatwo widać, że elipsa ma dwie osie symetrii: w położeniu kanonicznym osie układu współrzędnych; ma jeden środek symetrii: w położeniu kanonicznym punkt $(0,0)$; ma dwa ogniska: w położeniu kanonicznym $a = (\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}, 0)$ i $a' = (-\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}, 0)$ i dwie kierownice: w położeniu kanonicznym $K : x_1 - \frac{\alpha_1^2}{\sqrt{\alpha_1^2-\alpha_2^2}} = 0$ i $K' : x_1 + \frac{\alpha_1^2}{\sqrt{\alpha_1^2-\alpha_2^2}} = 0$. Ponadto mimośród $e = \frac{\sqrt{\alpha_1^2-\alpha_2^2}}{\alpha_1}$.



Uwaga. Okrąg możemy traktować jako elipsę (gdy $\alpha_1 = \alpha_2$).

Hiperbola H:

$e > 1$, niech $v - u = d$ i $u - e^2 v = 0$

Stąd

$$u = \frac{e^2 d}{1 - e^2}, \quad v = \frac{d}{1 - e^2} \quad \text{i} \quad u, v < 0.$$

Wtedy

$$u^2 - e^2 v^2 = -ud.$$

Zatem

$$H : \frac{(1 - e^2)x_1^2}{ud} + \frac{x_2^2}{ud} = 1.$$

Przyjmując $\alpha_1 = \sqrt{\frac{ud}{1-e^2}}$ i $\alpha_2 = \sqrt{-ud}$, przy czym

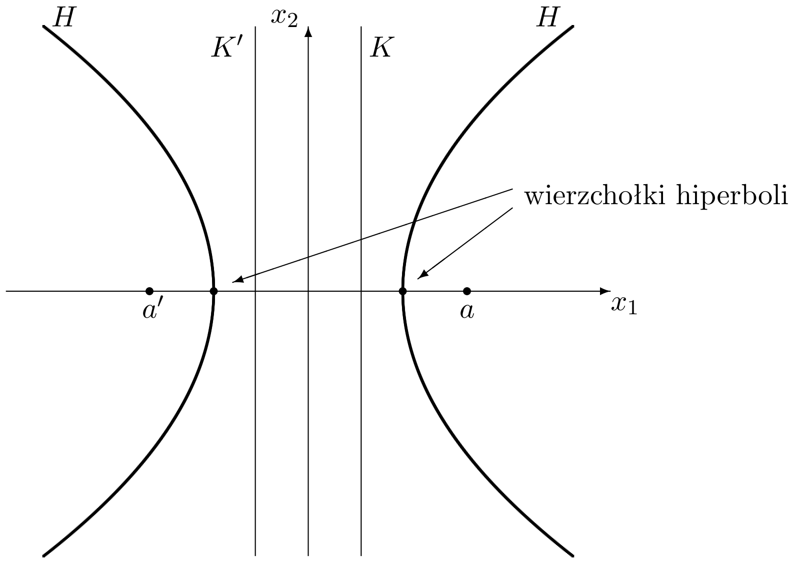
$$\alpha_1 = \frac{ed}{e^2 - 1} < -u, \quad \alpha_2 = \frac{ed}{\sqrt{e^2 - 1}} = \alpha_1 \sqrt{e^2 - 1} > \alpha_1,$$

mamy

$$H : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Jest to *równanie kanoniczne hiperboli.*

Łatwo widać, że hiperbola ma dwie osie symetrii: w położeniu kanonicznym osie układu współrzędnych; ma jeden środek symetrii: w położeniu kanonicznym punkt $(0,0)$; ma dwa ogniska: w położeniu kanonicznym $a = (\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, 0)$ i $a' = (-\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, 0)$ i dwie kierownice: w położeniu kanonicznym $K : x_1 - \frac{\alpha_1^2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} = 0$ i $K' : x_1 + \frac{\alpha_1^2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} = 0$. Ponadto mimośród $e = \frac{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{\alpha_1}$.



Definicja. $F, F' \subseteq \mathbb{R}^n$ – zbiory algebraiczne stopnia k

F, F' są *izometryczne* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ istnieje izometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ taka, że $f(F) = F'$.

F, F' są *podobne* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ istnieje podobieństwo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takie, że $f(F) = F'$.

F, F' *przystają afinicznie* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ istnieje przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takie, że $f(F) = F'$.

Uwaga. Zbiory izometryczne są podobne, a zbiory podobne przystają afinicznie.

Twierdzenie. Wszystkie parabole są podobne.

Dowód. Weźmy podobieństwo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że

$$f(x) = \lambda x, \text{ gdzie } \lambda > 0,$$

czyli

$$(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = f(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Weźmy parabolę $P : x_2^2 - 2dx_1 = 0$.

Wtedy

$$(\lambda x_2)^2 - 2\lambda d \cdot (\lambda x_1) = 0.$$

Stąd $P' : \overline{x}_2^2 - 2\lambda d\overline{x}_1 = 0$ oraz $\lambda d = d' \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{d'}{d}$.

Zatem podobieństwo f przekształca parabolę P na parabolę P'. Stąd teza twierdzenia. $\square$

Twierdzenie. Wszystkie elipsy przystają afinicznie.

Dowód. Weźmy przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że

$$(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = f(x_1, x_2) = (x_1, \sqrt{1-e^2}\; x_2), \quad 0 < e < 1.$$

Widać, że f przekształca okrąg $S(0, \alpha_1) : x_1^2 + x_2^2 = \alpha_1^2$ na elipsę $E : \overline{x}_1^2 + \frac{\overline{x}_2^2}{1-e^2} = \alpha_1^2$, czyli na elipsę $E : \frac{\overline{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\overline{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 1$ (bo $\alpha_2 = \alpha_1\sqrt{1-e^2}$). Stąd każda elipsa jest obrazem afinicznym okręgu. Zatem wszystkie elipsy przystają afinicznie. $\square$

Twierdzenie. Wszystkie hiperbole przystają afinicznie.

Dowód. Weźmy przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że

$$(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = f(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2).$$

Widać, że f przekształca hiperbolę $H_0 : x_1^2 - x_2^2 = 1$ na hiperbolę $H : \frac{\overline{x}_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{\overline{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 1$. Stąd każda hiperbola jest obrazem afinicznym hiperboli H_0. Zatem wszystkie hiperbole przystają afinicznie. $\square$

Zbiory algebraiczne stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$:

1. Zbiór 1-punktowy.

$a = (a_1, a_2, a_3), x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Wtedy

$$\{a\} : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = 0$$

oraz $\varphi(x) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2$ jest wielomianem stopnia 2, czyli $\deg(\{a\}) = 2$.

2. Sfera.

$a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ – środek, $r > 0$ – promień, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Sfera jest zbiorem zdefiniowanym następująco:

$$S = S(a, r) \underset{df}{=} \{x \in \mathbb{R}^3 : \rho(x, a) = r\}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} x \in S \ &\Leftrightarrow \ \rho(x, a) = r \ \Leftrightarrow \ [\rho(x, a)]^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow \ (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2. \end{aligned}$$

Zatem

$$S : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 - r^2 = 0$$

oraz $\varphi(x) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 - r^2$ jest wielomianem stopnia 2, czyli $\deg(S) = 2$.

3. Prosta.

$L \subseteq \mathbb{R}^3$ – prosta, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$L : \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \\ \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Stąd

$$L : (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2 + (\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3)^2 = 0$$

oraz $\varphi(x) = (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2 + (\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3)^2$ jest wielomianem stopnia 2, czyli $\deg(L) = 2$.

4. Suma dwu różnych płaszczyzn.

$P, Q \subseteq \mathbb{R}^3$ – płaszczyzny, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$P : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \quad Q : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0$$

Wtedy

$$\begin{aligned} x \in P \cup Q \ &\Leftrightarrow \ \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \ \vee \ \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) = 0. \end{aligned}$$

Zatem

$$P \cup Q : (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) = 0$$

oraz $\varphi(x) = (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3)$ jest wielomianem stopnia 2, czyli $\deg(P \cup Q) = 2$.

Definicja. (**Zbiór obrotowy**)

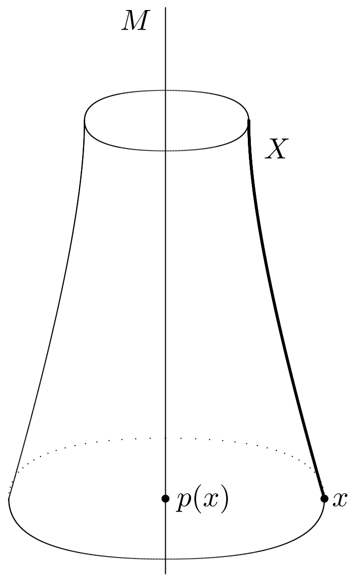
$M, X \subseteq \mathbb{R}^3$, M – prosta, $P(x)$ – płaszczyzna taka, że $x \in P(x) \perp M$, $P(x) \cap M = p(x)$

$S(x) = \{y \in P(x) : \rho(y, p(x)) = \rho(x, p(x))\}$ – okrąg w płaszczyźnie $P(x)$ o środku $p(x)$ przechodzący przez x

Zbiór

$$S(X, M) \underset{df}{=} \bigcup_{x \in X} S(x)$$

nazywa się *zbiorem obrotowym*. Wtedy M jest osią obrotu.



Twierdzenie. (**O równaniu zbioru obrotowego**)

$F \subseteq \mathbb{R}^3$, $F : \begin{cases} \varphi(x_2, x_3) = 0, \\ x_1 = 0, \end{cases}$ $L_3 =$ oś x_3

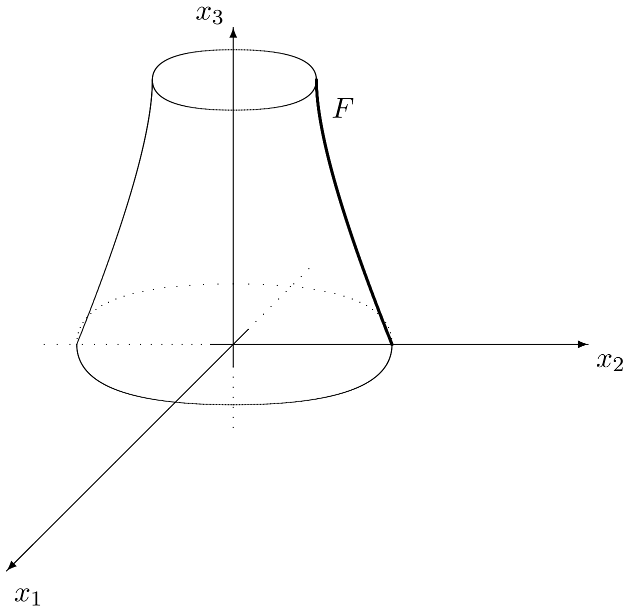
Wtedy

$$S(F, L_3) : \varphi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ , x_3\right) \cdot \varphi\left(-\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ , x_3\right) = 0.$$

Jeśli L_3 jest osią symetrii zbioru F, to

$$S(F, L_3) : \varphi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ , x_3\right) = 0.$$

Dowód. Mamy:



Niech $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $P : x_1 = 0$.

Wtedy

$$x \in S(F, L_3) \Leftrightarrow S(x) \cap P = \left\{ y = \left(0, \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, x_3\right), z = \left(0, -\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, x_3\right) \wedge (y \in F \vee z \in F) \right\}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} x \in S(F, L_3) \ &\Leftrightarrow\ \varphi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, x_3\right) = 0 \ \vee\ \varphi\left(-\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, x_3\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow\ \varphi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, x_3\right) \cdot \varphi\left(-\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, x_3\right) = 0. \end{aligned}$$

Zatem

$$S(F, L_3) : \varphi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, x_3\right) \cdot \varphi\left(-\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, x_3\right) = 0.$$

Jeśli L_3 jest osią symetrii zbioru F, to

$$\varphi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, x_3\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ \varphi\left(-\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, x_3\right) = 0.$$

Stąd

$$S(F, L_3) : \varphi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, x_3\right) = 0. \ \square$$

Walec obrotowy:

Definicja.

Walec obrotowy $\underset{df}{=}$ zbiór powstały przez obrót prostej dookoła prostej do niej równoległej (i różnej).

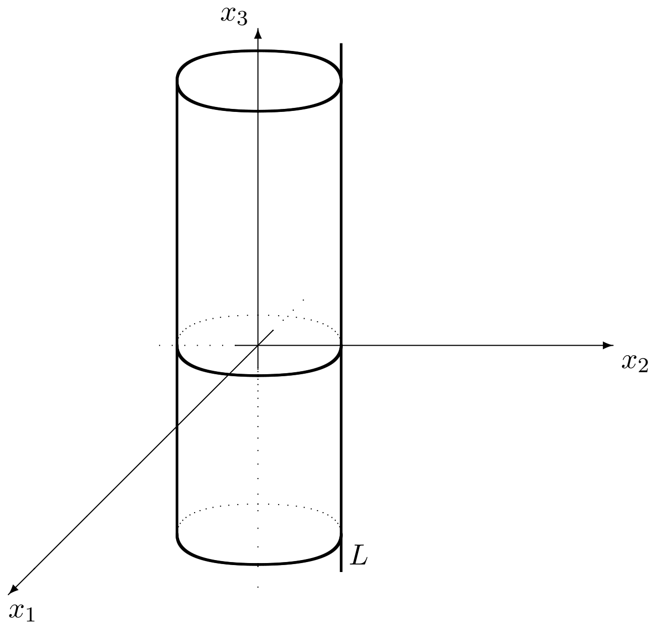
Niech $r > 0$ i $L_3 =$ oś x_3. Weźmy prostą

$$L : \begin{cases} x_2 = r, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

czyli

$$L : \begin{cases} \varphi(x_2, x_3) = x_2 - r = 0, \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

i obróćmy ją dookoła osi L_3:



Z twierdzenia o równaniu zbioru obrotowego mamy

$$W = S(L, L_3) : \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - r\right)\left(-\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - r\right) = 0, \text{ czyli}$$
$$W : x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0.$$

Stąd

$$W : x_1^2 + x_2^2 = r^2.$$

Jest to *równanie kanoniczne walca obrotowego.* Wtedy L nazywa się *tworząca prostoliniowa* walca.

Uwaga. Powyższe równanie jest równaniem okręgu leżącego w płaszczyźnie $P : x_3 = 0$. Dlatego walec obrotowy możemy też zdefiniować w następujący sposób.

Walec obrotowy $\underset{df}{=}$ suma wszystkich prostych (tworzących prostoliniowych) przecinających ten okrąg i prostopadłych do P.

Definicja. (**Walec nad zbiorem płaskim**)

$P, F \subseteq \mathbb{R}^3$, P – płaszczyzna, $F \subseteq P$

Walec nad F $\underset{df}{=}$ suma wszystkich prostych (tworzących prostoliniowych) przecinających F i prostopadłych do P.

Zatem:

Walec obrotowy = walec nad okręgiem.

Walec eliptyczny $\underset{df}{=}$ walec nad elipsą.

Walec paraboliczny $\underset{df}{=}$ walec nad parabolą.

Walec hiperboliczny $\underset{df}{=}$ walec nad hiperbolą.

Twierdzenie. (**O równaniu walca nad zbiorem płaskim**)

$F \subseteq \mathbb{R}^3$, $F : \begin{cases} \varphi(x_1, x_2) = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$

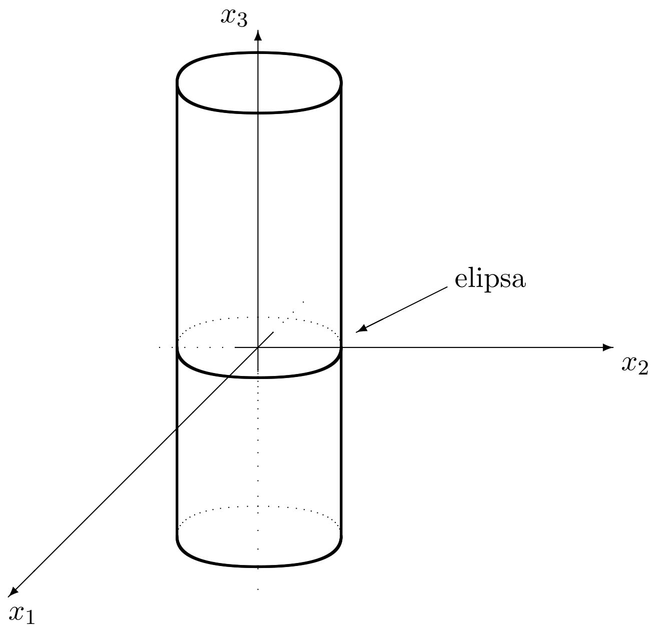
Wtedy walec nad F ma równanie:

$$WF : \varphi(x_1, x_2) = 0.$$

Dowód. Oczywisty. $\square$

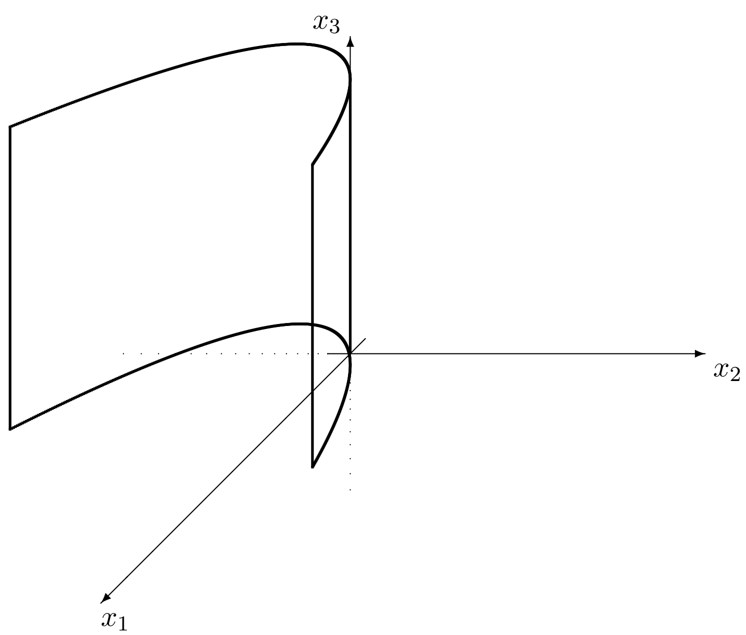
Walec eliptyczny WE:

$$WE : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 \ - \ \text{równanie kanoniczne}$$



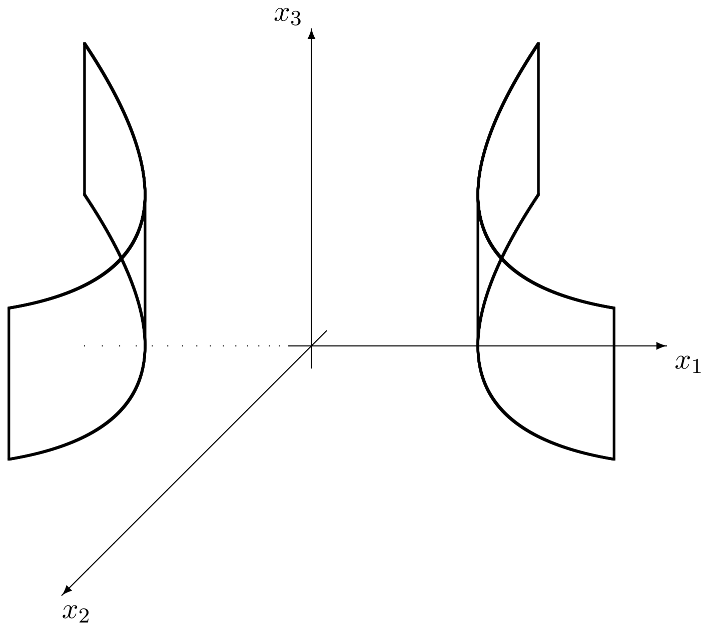
Walec paraboliczny WP:

$$WP : x_2^2 = 2dx_1 \ - \ \text{równanie kanoniczne}$$



Walec hiperboliczny WH:

$$WH : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 \ - \ \text{równanie kanoniczne}$$



Twierdzenie. (**O tworzących walca**)

Jeżeli W jest walcem obrotowym (lub eliptycznym, parabolicznym, hiperbolicznym), to przez każdy $x \in W$ przechodzi dokładnie jedna tworząca prostoliniowa walca W.

Dowód. W – walec w położeniu kanonicznym, $x \in W$, L – tworząca walca W taka, że $x \in L$

$P : x_3 = 0$, $P \cap W =$ okrąg lub stożkowa

Załóżmy, że istnieje tworząca L' walca W taka, że $x \in L'$ i $L' \neq L$. Niech

$$P' = \bigcup \{K : K \cap L' \neq \emptyset \wedge K \text{ jest tworzącą walca } W\}.$$

Wtedy P' jest płaszczyzną taką, że $P' \subseteq W$ i $P \cap P'$ jest prostą. Ale $P \cap P' \subseteq P \cap W$. Otrzymujemy sprzeczność. $\square$

Twierdzenie. Wszystkie walce obrotowe i eliptyczne przystają afinicznie.

Dowód. Wynika z faktu, że wszystkie elipsy i okręgi przystają afinicznie. $\square$

Stożek obrotowy:

Definicja.

Stożek obrotowy $\underset{df}{=}$ zbiór powstały przez obrót prostej L dookoła prostej M przy założeniu $\overline{\overline{L \cap M}} = 1$ i $\sim L \perp M$.

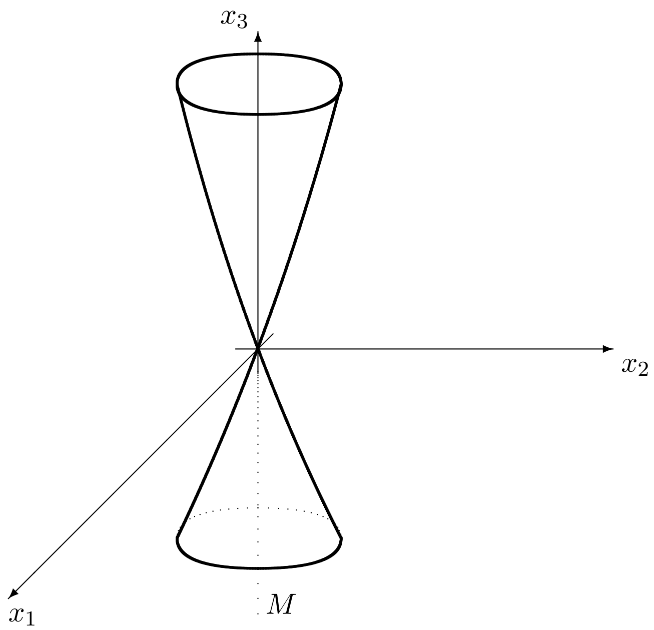
Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ i $M = L_3 =$ oś x_3. Weźmy prostą

$$L : \begin{cases} x_3 = \alpha x_2, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

czyli

$$L : \begin{cases} \varphi(x_2, x_3) = x_3 - \alpha x_2 = 0, \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

i obróćmy ją dookoła M:



Z twierdzenia o równaniu zbioru obrotowego mamy

$$S = S(L, L_3) : \left(x_3 - \alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\left(x_3 + \alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = 0, \text{ czyli}$$
$$S : x_3^2 - \alpha^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 0.$$

Stąd

$$S : \alpha^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) = x_3^2.$$

Jest to *równanie kanoniczne stożka obrotowego.* Wtedy $L \cap M$ jest *wierzchołkiem* stożka, a dowolna prosta przechodząca przez wierzchołek = tworząca prostoliniowa stożka. Jeżeli $\alpha = 0$, to stożek degeneruje się do płaszczyzny $x_3 = 0$. Jeżeli $\alpha = 1$, to $S : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ jest *stożkiem jednostkowym.*

Twierdzenie. Stożek obrotowy w położeniu kanonicznym jest symetryczny względem każdej z płaszczyzn układu współrzędnych oraz względem osi układu współrzędnych. Ponadto wierzchołek stożka jest jego środkiem symetrii.

Dowód. Wynika z postaci równania kanonicznego stożka. $\square$

Weźmy stożek jednostkowy $S : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ i przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, x_3),\ \text{gdzie } \alpha_1, \alpha_2 > 0 \text{ i } \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Wtedy f przekształca S na zbiór

$$SE : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = x_3^2.$$

Jest to *równanie kanoniczne stożka eliptycznego.*

Wniosek. Wszystkie stożki obrotowe i eliptyczne przystają afinicznie.

Twierdzenie. (**O tworzących stożka**)

Jeżeli S jest stożkiem obrotowym (lub eliptycznym), to przez każdy $x \in S$ różny od wierzchołka przechodzi dokładnie jedna tworząca prostoliniowa stożka S.

Dowód. Oczywisty. $\square$

Definicja. (**Zbiór prostokreślny**)

Zbiorem prostokreślnym nazywa się zbiór, który jest sumą prostych.

Twierdzenie. (**O charakteryzacji zbiorów prostokreślnych**) $X \subseteq \mathbb{R}^3$

$$X \text{ jest zbiorem prostokreślnym } \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in X} \bigvee_{L-\text{prosta}} x \in L \subseteq X.$$

Dowód.

$(\Rightarrow)$ $X = \bigcup_{t \in T} L_t$, $\{L_t : t \in T\}$ – rodzina prostych, $x \in X$

Wtedy $x \in \bigcup_{t \in T} L_t$, skąd $\bigvee_{t \in T} x \in L_t \subseteq X$.

$(\Leftarrow)$ $\bigwedge\limits_{x \in X} \bigvee\limits_{L-\text{prosta}} x \in L \subseteq X$, czyli

$$\bigwedge_{x \in X} \bigvee_{L_x-\text{prosta}} x \in L_x \subseteq X.$$

Weźmy $\{L_x\}_{x \in X}$. Wtedy $X = \bigcup\limits_{x \in X} L_x$. Zatem X jest zbiorem prostokreślnym. $\square$

Twierdzenie. Prostokreślność jest niezmiennikiem afinicznym.

Dowód. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – przekształcenie afiniczne, $X = \bigcup\limits_{t \in T} L_t$, $\{L_t : t \in T\}$ – rodzina prostych

Wtedy

$$f(X) = f\left(\bigcup_{t \in T} L_t\right) = \bigcup_{t \in T} f(L_t)$$

oraz $\{f(L_t)\}_{t \in T}$ jest rodziną prostych. Zatem $f(X)$ jest zbiorem prostokreślnym. $\square$

Wniosek. Wszystkie walce oraz stożki są zbiorami prostokreślnymi.

Uwaga. Zauważmy, że każdą stożkową da się otrzymać jako przekrój stożka obrotowego pewną płaszczyzną. Dlatego parabole, elipsy i hiperbole noszą wspólną nazwę *stożkowe*.

Mamy również inne definicje walca obrotowego i stożka obrotowego:

1. $M \subseteq \mathbb{R}^3$ – prosta, $r > 0$

Walec obrotowy można również zdefiniować następująco:

$$W(M, r) \underset{df}{=} \{x \in \mathbb{R}^3 : \rho(x, M) = r\}.$$

2. $\mathfrak{a}, a \in \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{a} \neq 0$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

Stożek obrotowy można również zdefiniować następująco:

$$S(a, \mathfrak{a}, \beta) \underset{df}{=} \{x \in \mathbb{R}^3 : x = a \ \vee\ \sphericalangle(\mathfrak{a}, [x - a]) = \beta \ \vee\ \sphericalangle(\mathfrak{a}, [x - a]) = \pi - \beta\}.$$

Elipsoida:

Definicja.

Elipsoida obrotowa $\underset{df}{=}$ zbiór powstały przez obrót elipsy dookoła jednej z jej osi symetrii.

Elipsoida obrotowa nazywa się *wydłużona*, gdy obrót jest dookoła wielkiej osi elipsy, oraz *spłaszczona* gdy obrót jest dookoła małej osi elipsy.

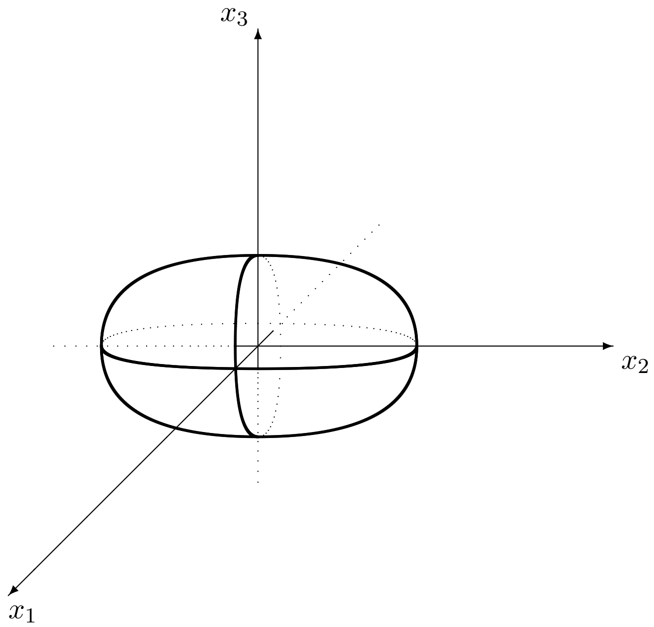
Niech $L_3 =$ oś x_3. Weźmy elipsę

$$E : \begin{cases} \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

czyli

$$E : \begin{cases} \varphi(x_2, x_3) = \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} - 1 = 0, \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

i obróćmy ją dookoła osi L_3:



Z twierdzenia o równaniu zbioru obrotowego mamy

$$S(E, L_3) : \frac{x_1^2 + x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1$$

Jest to *równanie kanoniczne elipsoidy obrotowej*. Jeżeli $0 < \alpha_2 < \alpha_3$, to elipsoida obrotowa jest wydłużona, a jeżeli $0 < \alpha_3 < \alpha_2$, to elipsoida obrotowa jest spłaszczona.

Weźmy przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1, x_2, x_3 \right), \text{ gdzie } \alpha_1, \alpha_2 > 0 \text{ i } \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Wtedy f przekształca elipsoidę obrotową na zbiór

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{x_2^2}{\alpha_2^2}+\frac{x_3^2}{\alpha_3^2}=1.$$

Jest to *równanie kanoniczne elipsoidy trójosiowej* (*elipsoidy*).

Ponadto przekształcenie afiniczne $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ takie, że

$$g(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{1}{\alpha_1}x_1,\frac{1}{\alpha_2}x_2,\frac{1}{\alpha_3}x_3\right)$$

przekształca elipsoidę na sferę o równaniu $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$.

Wniosek. Wszystkie elipsoidy i sfery przystają afinicznie.

Twierdzenie. Elipsoida w położeniu kanonicznym jest symetryczna względem każdej z płaszczyzn układu współrzędnych, względem osi układu współrzędnych oraz względem początku układu współrzędnych.

Dowód. Wynika z postaci równania kanonicznego elipsoidy. □

Uwaga. Punkty $(\alpha_1,0,0)$, $(-\alpha_1,0,0)$, $(0,\alpha_2,0)$, $(0,-\alpha_2,0)$, $(0,0,\alpha_3)$ i $(0,0,-\alpha_3)$ nazywają się wierzchołkami elipsoidy o równaniu

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{x_2^2}{\alpha_2^2}+\frac{x_3^2}{\alpha_3^2}=1.$$

Twierdzenie. Elipsoida obrotowa (trójosiowa) nie jest zbiorem prostokreślnym.

Dowód. Wynika z postaci równania kanonicznego elipsoidy i twierdzenia o charakteryzacji zbiorów prostokreślnych. □

Hiperboloida 1-powłokowa:

Definicja.

Hiperboloida 1-powłokowa obrotowa $\underset{df}{=}$ zbiór powstały przez obrót hiperboli dookoła nieprzecinającej jej osi symetrii.

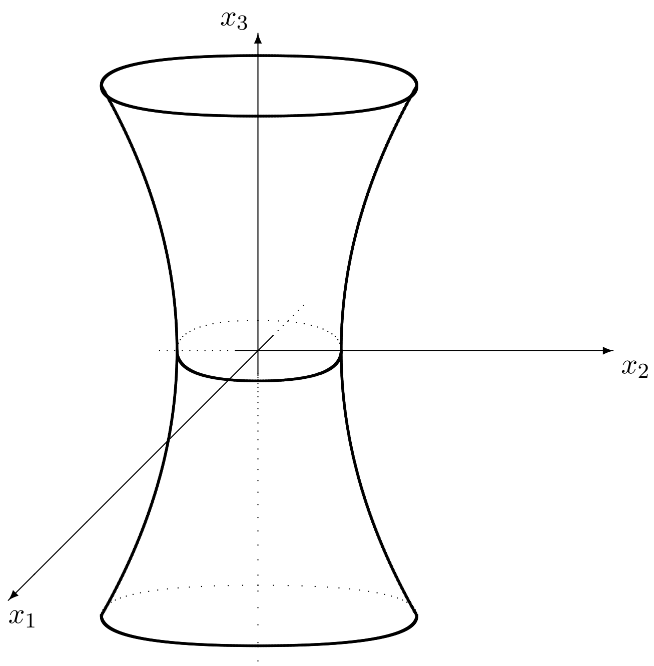
Niech $L_3=$ oś x_3. Weźmy hiperbolę

$$H:\begin{cases}\frac{x_2^2}{\alpha_2^2}-\frac{x_3^2}{\alpha_3^2}=1,\\ x_1=0,\end{cases}$$

czyli

$$H:\begin{cases}\varphi(x_2,x_3)=\frac{x_2^2}{\alpha_2^2}-\frac{x_3^2}{\alpha_3^2}-1=0,\\ x_1=0\end{cases}$$

i obróćmy ją dookoła osi L_3:



Z twierdzenia o równaniu zbioru obrotowego mamy

$$S(H, L_3) : \frac{x_1^2 + x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1$$

Jest to *równanie kanoniczne hiperboloidy* 1*-powłokowej obrotowej.*

Weźmy przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1, x_2, x_3 \right), \text{ gdzie } \alpha_1, \alpha_2 > 0 \text{ i } \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Wtedy f przekształca hiperboloidę 1-powłokową obrotową na zbiór

$$H_1 : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1.$$

Jest to *równanie kanoniczne hiperboloidy* 1*-powłokowej.*

Ponadto przekształcenie afiniczne $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$g(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\alpha_1} x_1, \frac{1}{\alpha_2} x_2, \frac{1}{\alpha_3} x_3 \right)$$

przekształca hiperboloidę 1-powłokową na hiperboloidę 1-powłokową o równaniu $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$.

Wniosek. Wszystkie hiperboloidy 1-powłokowe przystają afinicznie.

Twierdzenie. Hiperboloida 1-powłokowa w położeniu kanonicznym jest symetryczna względem każdej z płaszczyzn układu współrzędnych, względem osi układu współrzędnych oraz względem początku układu współrzędnych.

Dowód. Wynika z postaci równania kanonicznego hiperboloidy 1-powłokowej. $\square$

Twierdzenie. $F \subseteq \mathbb{R}^3$ – zbiór algebraiczny

F jest hiperboloidą 1-powłokową obrotową $\Leftrightarrow$ jest zbiorem powstałym przez obrót prostej L dookoła prostej M takiej, że $L \cap M = \emptyset$ i $\sim L \perp M$.

Dowód. Niech $M = L_3 =$ oś x_3 oraz

$$L : \begin{cases} x_2 = a, \\ x_1 = bx_3, \ b \neq 0. \end{cases}$$

Wówczas zbiór powstały przez obrót prostej L dookoła prostej M jest sumą okręgów leżących w płaszczyźnie $x_3 = t$, których środki leżą na M i które przecinają L, czyli zbiór:

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \bigvee_{t \in \mathbb{R}} x_3 = t \ \wedge \ x_1^2 + x_2^2 = a^2 + (bt)^2 \right\}.$$

Stąd

$$F : x_1^2 + x_2^2 - b^2 x_3^2 = a^2.$$

Przyjmując $a = \alpha_2$ i $b = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ otrzymujemy równanie kanoniczne hiperboloidy 1-powłokowej obrotowej. $\square$

Uwaga. Tę samą hiperboloidę 1-powłokową obrotową otrzyma się biorąc prostą

$$L' : \begin{cases} x_2 = a, \\ x_1 = -bx_3, \ b \neq 0 \end{cases}$$

zamiast L.

Wniosek. Przez każdy punkt hiperboloidy 1-powłokowej przechodzą dwie proste całkowicie w niej zawarte.

Wniosek. Hiperboloida 1-powłokowa jest zbiorem prostokreślnym.

Hiperboloida 2-powłokowa:

Definicja.

Hiperboloida 2-powłokowa obrotowa $\underset{df}{=}$ zbiór powstały przez obrót hiperboli dookoła przecinającej ją osi symetrii.

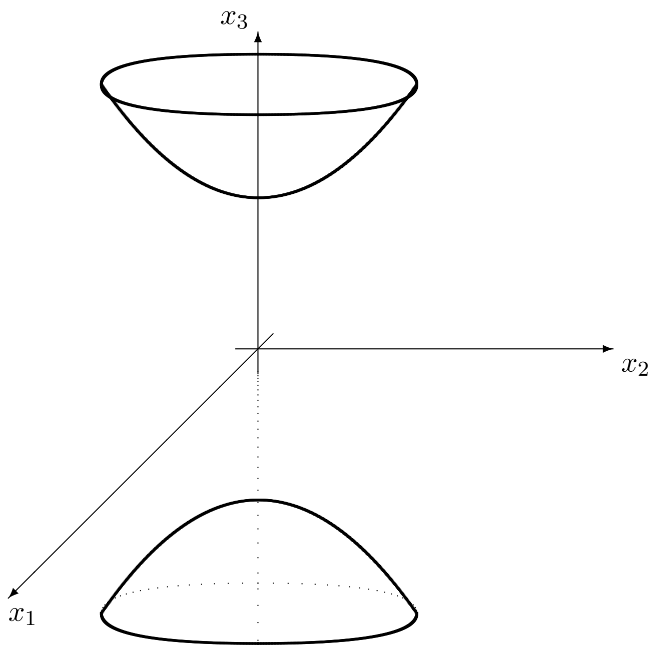
Niech $L_3 =$ oś x_3. Weźmy hiperbolę

$$H : \begin{cases} -\frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

czyli

$$H : \begin{cases} \varphi(x_2, x_3) = -\frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} - 1 = 0, \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

i obróćmy ją dookoła osi L_3:



Z twierdzenia o równaniu zbioru obrotowego mamy

$$S(H, L_3) : \frac{x_1^2 + x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = -1$$

Jest to *równanie kanoniczne hiperboloidy 2-powłokowej obrotowej.*

Weźmy przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1, x_2, x_3\right), \text{ gdzie } \alpha_1 > 0.$$

Wtedy f przekształca hiperboloidę 2-powłokową obrotową na zbiór

$$H_2 : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = -1.$$

Jest to *równanie kanoniczne hiperboloidy 2-powłokowej.*

Ponadto przekształcenie afiniczne $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$g(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\alpha_1}x_1, \frac{1}{\alpha_2}x_2, \frac{1}{\alpha_3}x_3\right)$$

przekształca hiperboloidę 2-powłokową na hiperboloidę 2-powłokową obrotową o równaniu $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$.

Wniosek. Wszystkie hiperboloidy 2-powłokowe przystają afinicznie.

Twierdzenie. Hiperboloida 2-powłokowa w położeniu kanonicznym jest symetryczna względem każdej z płaszczyzn układu współrzędnych, względem osi układu współrzędnych oraz względem początku układu współrzędnych.

Dowód. Wynika z postaci równania kanonicznego hiperboloidy 2-powłokowej. $\square$

Twierdzenie. Hiperboloida 2-powłokowa nie jest zbiorem prostokreślnym.

Dowód. Ponieważ prostokreślność jest niezmiennikiem afinicznym, więc wystarczy pokazać, że hiperboloida 2-powłokowa obrotowa $H_2 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ nie jest prostokreślna. Pokażemy, że przez punkt $a = (0, 0, 1)$ nie przechodzi żadna tworząca L hiperboloidy H_2.

Niech $L = \{a + t\mathfrak{a} : t \in \mathbb{R}\}$, gdzie $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \neq [0, 0, 0]$. Załóżmy, że $L \subseteq H_2$. Wtedy

$$\bigwedge_{t\in\mathbb{R}} (t\alpha_1)^2 + (t\alpha_2)^2 - (1 + t\alpha_3)^2 = -1,$$

czyli

$$\bigwedge_{t\in\mathbb{R}} t^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2) - 2t\alpha_3 = 0.$$

Stąd $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0$ i $\alpha_3 = 0$, czyli $\mathfrak{a} = [0, 0, 0]$. Otrzymujemy sprzeczność. $\square$

Paraboloida eliptyczna:

Definicja.

Paraboloida obrotowa $\underset{df}{=}$ zbiór powstały przez obrót paraboli dookoła jej osi symetrii.

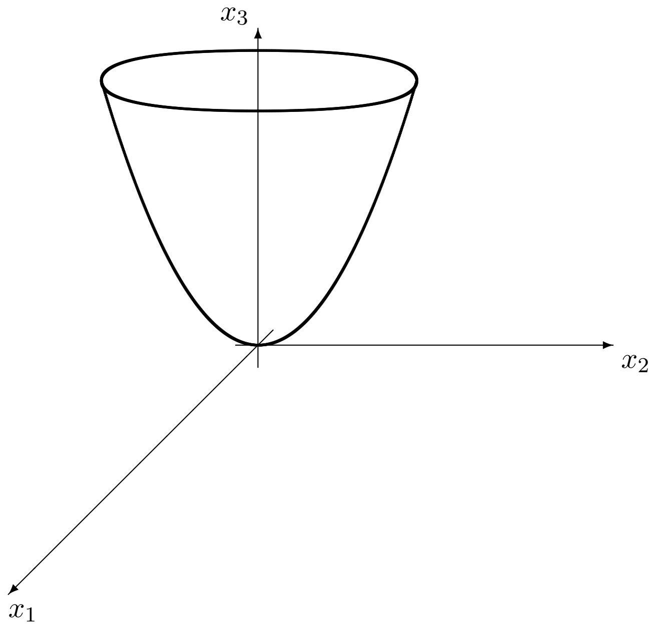
Niech $L_3 =$ oś x_3. Weźmy parabolę

$$P : \begin{cases} \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 2x_3, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

czyli

$$P : \begin{cases} \varphi(x_2, x_3) = \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - 2x_3 = 0, \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

i obróćmy ją dookoła osi L_3:



Z twierdzenia o równaniu zbioru obrotowego mamy

$$S(P, L_3) : \frac{x_1^2 + x_2^2}{\alpha_2^2} = 2x_3.$$

Jest to *równanie kanoniczne paraboloidy obrotowej.*

Weźmy przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1, x_2, x_3\right), \text{ gdzie } \alpha_1 > 0.$$

Wtedy f przekształca paraboloidę obrotową na zbiór

$$PE : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 2x_3.$$

Jest to *równanie kanoniczne paraboloidy eliptycznej.*

Ponadto przekształcenie afiniczne $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$g(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\alpha_1} x_1, \frac{1}{\alpha_2} x_2, x_3\right)$$

przekształca paraboloidę eliptyczną na paraboloidę obrotową o równaniu $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$.

Wniosek. Wszystkie paraboloidy obrotowe i eliptyczne przystają afinicznie.

Twierdzenie. Paraboloida obrotowa (eliptyczna) w położeniu kanonicznym jest symetryczna względem płaszczyzn $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$ oraz względem osi x_3.

Dowód. Wynika z postaci równania kanonicznego paraboloidy. $\square$

Uwaga. Punkt przecięcia paraboloidy obrotowej (eliptycznej) z jej osią symetrii nazywa się wierzchołkiem tej paraboloidy.

Twierdzenie. Paraboloida obrotowa (eliptyczna) nie ma środka symetrii.

Dowód. Istotnie taki środek nie mógłby być różny od wierzchołka, ponieważ punkt symetryczny do wierzchołka też musiałby być wierzchołkiem. Ale wierzchołek również nie jest środkiem symetrii, bo punkty $(0, \alpha_2, \frac{1}{2})$ i $(0, -\alpha_2, -\frac{1}{2})$ są symetryczne względem wierzchoła $(0, 0, 0)$ paraboloidy w położeniu kanonicznym. Pierwszy z nich leży na paraboloidzie, a drugi nie. $\square$

Twierdzenie. Paraboloida obrotowa (eliptyczna) nie jest zbiorem prostokreślnym.

Dowód. Podobny jak w przypadku hiperboloidy 2-powłokowej. $\square$

Paraboloida hiperboliczna:

$Q_1, Q_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ – płaszczyzny, $Q_1 \perp Q_2$, $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ – parabole, $P_1 \subseteq Q_1$, $P_2 \subseteq Q_2$

$a \in \mathbb{R}^3$ – wspólny wierzchołek parabol P_1 i P_2

$L \subseteq \mathbb{R}^3$ – wspólna oś symetrii parabol P_1 i P_2

$b \in P_2$, $f_b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – przesunięcie dane wzorem

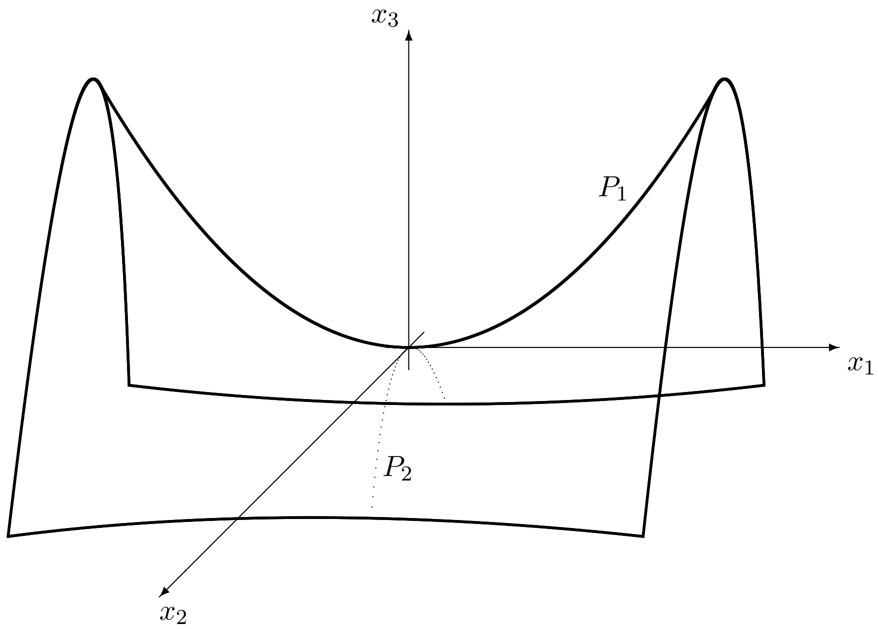
$$f_b(x) = x + (b - a).$$

Mamy: $f_b(a) = b$ oraz $f_b(P_1)$ jest parabolą.

Definicja.

Paraboloida hiperboliczna:

$$PH \underset{df}{=} \bigcup_{b \in P_2} f_b(P_1).$$



Niech $Q_1 : x_2 = 0$, $Q_2 : x_1 = 0$, $a = (0, 0, 0)$, $L = L_3 =$ oś x_3.

Wtedy

$$P_1 : \begin{cases} x_1^2 - 2\alpha_1^2 x_3 = 0, \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ i } P_2 : \begin{cases} x_2^2 + 2\alpha_2^2 x_3 = 0, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

czyli

$$P_1 : \begin{cases} x_3 = \frac{x_1^2}{2\alpha_1^2}, \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ i } P_2 : \begin{cases} x_3 = -\frac{x_2^2}{2\alpha_2^2}, \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

oraz $f_b(x) = x + b$, gdzie $b \in P_2$.

Stąd

$$PH = \bigcup_{b \in P_2} f_b(P_1) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \frac{x_1^2}{2\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{2\alpha_2^2} \right\}.$$

Zatem

$$PH : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 2x_3.$$

Jest to *równanie kanoniczne paraboloidy hiperbolicznej.*

Uwaga. Inna nazwa paraboloidy hiperbolicznej to *powierzchnia siodłowa* lub krótko *siodło.*

Weźmy przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\alpha_1} x_1, \frac{1}{\alpha_2} x_2, x_3 \right).$$

Wtedy f przekształca paraboloidę hiperboliczną na paraboloidę hiperboliczną o równaniu $x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$.

Wniosek. Wszystkie paraboloidy hiperboliczne przystają afinicznie.

Twierdzenie. Paraboloida hiperboliczna w położeniu kanonicznym jest symetryczna względem płaszczyzn $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$ oraz względem osi x_3.

Dowód. Wynika z postaci równania kanonicznego paraboloidy. $\square$

Uwaga. Punkt $(0, 0, 0)$ nazywa się wierzchołkiem paraboloidy hiperbolicznej w położeniu kanonicznym.

Twierdzenie. Paraboloida hiperboliczna nia ma środka symetrii.

Dowód. Podobny jak w przypadku paraboloidy eliptycznej. $\square$

Twierdzenie. Paraboloida hiperboliczna jest zbiorem prostokreślnym.

Dowód. Wystarczy pokazać, że paraboloida hiperboliczna $PH : x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$ jest prostokreślna. Zauważmy, że

$$PH : \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_3 \\ 2 & x_1 + x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd

$$(x_1, x_2, x_3) \in PH \;\Leftrightarrow \bigvee_{\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha^2+\beta^2>0} \begin{cases} \alpha(x_1 - x_2) + \beta x_3 = 0, \\ 2\alpha + \beta(x_1 + x_2) = 0 \end{cases} \text{(proporcjonalne kolumny)}$$

oraz

$$(x_1, x_2, x_3) \in PH \;\Leftrightarrow \bigvee_{\gamma,\delta\in\mathbb{R},\gamma^2+\delta^2>0} \begin{cases} \gamma(x_1 - x_2) + 2\delta = 0, \\ \gamma x_3 + \delta(x_1 + x_2) = 0 \end{cases} \text{(proporcjonalne wiersze).}$$

Pierwszy układ jest równaniem krawędziowym pewnej prostej $L_{\alpha\beta}$, ponieważ $\mathfrak{a}_1 = [\alpha, -\alpha, \beta] \perp L_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{a}_2 = [\beta, \beta, 0] \perp L_{\alpha\beta}$ oraz $\mathfrak{a}_1 \nparallel \mathfrak{a}_2$ (bo $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$). Podobnie drugi układ opisuje pewną prostą $L_{\gamma\delta}$. Zatem

$$x \in PH \;\Leftrightarrow \bigvee_{\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha^2+\beta^2>0} x \in L_{\alpha\beta} \;\Leftrightarrow \bigvee_{\gamma,\delta\in\mathbb{R},\gamma^2+\delta^2>0} x \in L_{\gamma\delta},$$

skąd

$$PH = \bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha^2+\beta^2>0} L_{\alpha\beta} \qquad \text{oraz} \qquad PH = \bigcup_{\gamma,\delta\in\mathbb{R},\gamma^2+\delta^2>0} L_{\gamma\delta}.$$

Zatem paraboloida hiperboliczna jest zbiorem prostokreślnym. $\square$

Wniosek. Przez każdy punkt paraboloidy hiperbolicznej przechodzą dwie proste całkowicie w niej zawarte.

Uwaga. Elipsoidy, hiperboloidy 1- i 2-powłokowe oraz paraboloidy eliptyczne i hiperboliczne noszą wspólną nazwę *kwadryki*.

Wniosek. Kwadryki są zbiorami algebraicznymi stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$.

Uwaga. Kwadryki nie przystają parami afinicznie, tzn., reprezentują różne typy afiniczne.

Rozdział 9

Przestrzeń rzutowa rzeczywista P^n i zespolona CP^n

Definicja. (**Współrzędne jednorodne**) $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \;\; x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Współrzędne jednorodne punktu $x \underset{df}{=} \{\lambda, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n\}$.

Oznaczenie: $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Stąd dla $x_0 \neq 0$ mamy

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} = \left\{1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right\} = \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Jeśli $x_0 \to 0$, to odległość punktów $\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ i $(x_1, \ldots, x_n)$ rośnie do nieskończoności. Zatem punkt $\{0, x_1, \ldots, x_n\}$ nazywa się *punktem w nieskończoności*. Łatwo widać, że

$$\{0, x_1, \ldots, x_n\} = \mathcal{K}([x_1, \ldots, x_n]),$$

czyli punkt w nieskończoności $\{0, x_1, \ldots, x_n\}$ jest kierunkiem wektora $[x_1, \ldots, x_n]$ w $\mathbb{R}^n$.

Definicja. (**Przestrzeń rzutowa n-wymiarowa P^n**)

$$P^n \underset{df}{=} \mathbb{R}^n \cup \{\text{kierunki w } \mathbb{R}^n\}.$$

Kierunki w $\mathbb{R}^n$ nazywają się *punktami niewłaściwymi* przestrzeni rzutowej P^n. Przestrzeń P^1 nazywa się *prostą rzutową*, a przestrzeń P^2 nazywa się *płaszczyzną rzutową*.

Definicja. (**Prosta rzutowa w P^n**)

W P^1 istnieje dokładnie jedna prosta rzutowa. Jest nią P^1.

Jeżeli są zdefiniowane proste rzutowe w P^{n-1}, to prostymi rzutowaymi w P^n są:

1) proste w $\mathbb{R}^n$ wraz z ich punktami niewłaściwymi (*proste właściwe*),

2) zbiory punktów postaci $\{0, x_1, \ldots, x_n\}$ takie, że zbiór punktów $\{x_1, \ldots, x_n\} \in P^{n-1}$ tworzy prostą rzutową w P^{n-1} (*proste niewłaściwe*).

Uwaga. Zbiór punktów niewłaściwych płaszczyzny rzutowej P^2 jest prostą niewłaściwą.

Uwaga. Prosta rzutowa różni się od prostej kartezjańskiej jednym punktem dodatkowym, który ją w pewnym sensie zamyka, upodabniając ją jakby do okręgu o „nieskończenie wielkim” promieniu.

Twierdzenie. Przez każde dwa różne punkty $a = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}, b = \{b_0, b_1, \ldots, b_n\} \in P^n$ przechodzi dokładnie jedna prosta rzutowa składająca się z punktów postaci

$$x(\lambda, \mu) = \{\lambda a_0 + \mu b_0, \lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu b_n\},$$

gdzie $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Jest to *przedstawienie parametryczne* prostej rzutowej.

Dowód. Mamy $a \neq b$ i $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, skąd $x(\lambda, \mu) \in P^n$. Ponadto dla $\alpha, \beta \neq 0$

$$\begin{aligned} x(\lambda, \mu) &= \{\lambda a_0 + \mu b_0, \lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu b_n\} \\ &= \{\lambda \alpha a_0 + \mu \beta b_0, \lambda \alpha a_1 + \mu \beta b_1, \ldots, \lambda \alpha a_n + \mu \beta b_n\}, \end{aligned}$$

czyli dowolny punkt proporcjonalny do a i dowolny punkt proporcjonalny do b wyznaczją te same punkty $x(\lambda, \mu)$.

Dowód, że punkty powyższej postaci określają prostą rzutową przeprowadzimy indukcyjnie względem n. Dla $n = 1$ jest to oczywiste.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe w przestrzeniach rzutowych o wymiarze mniejszym od n. Mamy trzy przypadki:

1) a, b – punkty właściwe

Załóżmy, że $a_0 = b_0 = 1$. Jeśli $\lambda + \mu \neq 0$, to

$$\begin{aligned} x(\lambda, \mu) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} a_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} b_1, \ldots, \frac{\lambda}{\lambda + \mu} a_n + \frac{\mu}{\lambda + \mu} b_n \right) \\ &= \frac{\lambda + \mu - \mu}{\lambda + \mu} a + \frac{\mu}{\lambda + \mu} b = \left(1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) a + \frac{\mu}{\lambda + \mu} b. \end{aligned}$$

Z twierdzenia o prostej punkt $x(\lambda, \mu)$ jest punktem właściwym prostej. Jeśli $\lambda + \mu = 0$, to

$$\begin{aligned} x(\lambda, \mu) &= \{\lambda a_0 + \mu b_0, \lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu b_n\} \\ &\overset{\lambda = -\mu}{=} \{0, b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n\} \end{aligned}$$

jest punktem niewłaściwym prostej.

2) a – właściwy, b – niewłaściwy (lub na odwrót)

Załóżmy, że $a_0 = 1$ i $b_0 = 0$. Jeśli $\lambda \neq 0$, to

$$x(\lambda, \mu) = \left(a_1 + \frac{\mu}{\lambda}b_1, \ldots, a_n + \frac{\mu}{\lambda}b_n\right) = a + \frac{\mu}{\lambda}(b_1, \ldots, b_n).$$

Stąd widzimy, że punkt $x(\lambda, \mu)$ jest punktem właściwym prostej przechodzącej przez a i mającej kierunek $[b_1, \ldots, b_n]$, czyli o punkcie niewłaściwym $\{0, b_1, \ldots, b_n\}$. Jeśli $\lambda = 0$, to

$$x(0, \mu) = \{0, \mu b_1, \ldots, \mu b_n\} = b,$$

czyli jest punktem niewłaściwym prostej.

3) a, b – punkty niewłaściwe

Wtedy $a_0 = b_0 = 0$ oraz

$$x(\lambda, \mu) = \{0, \lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu b_n\}.$$

Z założenia indukcyjnego $\{\lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu b_n\}$ przedstawia prostą rzutową w P^{n-1}. Stąd $x(\lambda, \mu)$ przedstawia prostą rzutową w P^n.

Łatwo jest pokazać, że liczby λ i μ są przez punkt $x(\lambda, \mu)$ wyznaczone z dokładnością do proporcjonalności. $\square$

Definicja. $f : P^n \to P^n$, $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in P^n$

f jest *przekształceniem rzutowym* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \{\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$, gdzie $\overline{x}_j = \alpha_{0j}x_0 + \alpha_{1j}x_1 + \ldots + \alpha_{nj}x_n$ dla $j = 0, 1, \ldots, n$ oraz macierz przekształcenia f:

$$A_f = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{10} & \ldots & \alpha_{n0} \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{0n} & \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa.

Wniosek. Przekształcenie rzutowe jest wzajemnie jednoznaczne.

Twierdzenie. Superpozycja dwu przekształceń rzutowych jest przekształceniem rzutowym.

Dowód. $f : P^n \to P^n$ – przekształcenie rzutowe o macierzy A_f, $f' : P^n \to P^n$ – przekształcenie rzutowe o macierzy $A_{f'}$

Stąd przekształcenie f ma postać

$$\begin{bmatrix} \overline{x}_0 \\ \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{bmatrix} = A_f \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

oraz przekształcenie f' ma postać

$$\begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = A_{f'} \cdot \begin{bmatrix} \overline{x}_0 \\ \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{bmatrix}.$$

Wtedy przekształcenie $f'f$ można zapisać następująco

$$\begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = A_{f'} \cdot A_f \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Zatem $A_{f'f} = A_{f'} \cdot A_f$ i jest nieosobliwa, bo A_f i $A_{f'}$ są nieosobliwe. Stąd przekształcenie $f'f$ jest rzutowe. $\square$

Twierdzenie. Jeżeli f jest przekształceniem rzutowym, to f^{-1} jest przekształceniem rzutowym.

Dowód. $f : P^n \to P^n$ – przekształcenie rzutowe o macierzy A_f

Stąd f ma postać

$$\begin{bmatrix} \overline{x}_0 \\ \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{bmatrix} = A_f \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Jest to układ równań liniowych o nieosobliwej macierzy współczynników A_f. Stąd ma on dokładnie jedno rozwiązanie $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Rozwiązując ten układ otrzymujemy przekształcenie odwrotne f^{-1} postaci

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A_f^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \overline{x}_0 \\ \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{bmatrix}.$$

Stąd $A_{f^{-1}} = A_f^{-1}$ i jest nieosobliwa. Zatem f^{-1} jest przekształceniem rzutowym. $\square$

Definicja.

Niezmiennik rzutowy $\underset{df}{=}$ własność, która nie zmienia się przy przekształceniach rzutowych.

Twierdzenie. Prosta rzutowa jest niezmiennikiem rzutowym.

Dowód. $a = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}, b = \{b_0, b_1, \ldots, b_n\} \in P^n$, $a \neq b$

Niech L będzie prostą rzutową przechodzącą przez punkty a, b. Wtedy

$$L : x(\lambda,\mu) = \{\lambda a_0 + \mu b_0, \lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu b_n\},\ \text{gdzie } (\lambda,\mu) \neq (0,0).$$

Łatwo widać, że punkt $x(\lambda,\mu)$ prostej L przechodzi przy przekształceniu rzutowym na punkt

$$\{\lambda\overline{a}_0 + \mu\overline{b}_0, \lambda\overline{a}_1 + \mu\overline{b}_1, \ldots, \lambda\overline{a}_n + \mu\overline{b}_n\},$$

czyli na punkt prostej rzutowej przechodzącej przez punkty $\overline{a} = \{\overline{a}_0, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ i $\overline{b} = \{\overline{b}_0, \overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n\}$. $\square$

Definicja. $f : P^n \to P^n$ – przekształcenie rzutowe, $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \{\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\} \in P^n$

Przekształcenie f jest *afiniczne* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \{\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$, gdzie

$$\begin{cases} \overline{x}_0 = x_0, \\ \overline{x}_j = \alpha_{0j}x_0 + \alpha_{1j}x_1 + \ldots + \alpha_{nj}x_n \ \text{ dla } \ j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Wniosek. Przy przekształceniach rzutowych afinicznych punkty właściwe przestrzeni P^n przechodzą na punkty właściwe, a niewłaściwe na niewłaściwe.

Uwaga. Macierz przekształcenia rzutowego afinicznego f ma postać:

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{0n} & \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

i jest nieosobliwa. Jeśli A_f jest ortogonalna, to f nazywa się izometria rzutowa, a jeśli dla $\lambda > 0$ macierz $\frac{1}{\lambda}A_f$ jest ortogonalna, to f nazywa się podobieństwo rzutowe o współczynniku λ.

Wniosek. Każde przekształcenie afiniczne (izometria, podobieństwo) jest przekształceniem rzutowym.

Wniosek. Każdy niezmiennik rzutowy jest niezmiennikiem afinicznym (a więc również podobieństw i izometrii).

Definicja. (**Stosunek anharmoniczny**)

L – prosta rzutowa w P^n, $p = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}, q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\} \in L$, $p \neq q$

$L : x(\lambda,\mu) = \{\lambda p_0 + \mu q_0, \lambda p_1 + \mu q_1, \ldots, \lambda p_n + \mu q_n\}$

$a, b, c, d \in L$, $\overline{\overline{\{a, b, c, d\}}} = 4$, $a = x(\lambda_a, \mu_a)$, $b = x(\lambda_b, \mu_b)$, $c = x(\lambda_c, \mu_c)$, $d = x(\lambda_d, \mu_d)$

Stosunek anharmonicz ny punktów a, b, c, d wyraża się wzorem

$$(a,b;c,d) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_a & \mu_a \\ \lambda_c & \mu_c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_b & \mu_b \\ \lambda_d & \mu_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_a & \mu_a \\ \lambda_d & \mu_d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_b & \mu_b \\ \lambda_c & \mu_c \end{vmatrix}}, \quad (a,b;c,d) \neq 0.$$

Jeśli $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$, to

$$(a,b;c,d) = \pm \frac{\rho(a,c) \cdot \rho(b,d)}{\rho(a,d) \cdot \rho(b,c)}.$$

Twierdzenie. L – prosta rzutowa w P^n, $a, b, c, d \in L$, $\overline{\overline{\{a,b,c,d\}}} = 4$

Wtedy

1) $(a,b;c,d) = \frac{1}{(a,b;d,c)} = \frac{1}{(b,a;c,d)} = (b,a;d,c)$,
2) $(a,b;c,d) = (c,d;a,b)$,
3) $(a,b;c,d) = 1 - (a,c;b,d)$.

Dowód. Wynika bezpośrednio z definicji. $\square$

Twierdzenie. Stosunek anharmoniczny jest niezmiennikiem rzutowym.

Dowód. L – prosta rzutowa w P^n, $p = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}, q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\} \in L$, $p \neq q$

$L : x(\lambda, \mu) = \{\lambda p_0 + \mu q_0, \ldots, \lambda p_n + \mu q_n\}$, $a, b, c, d \in L$, $\overline{\overline{\{a,b,c,d\}}} = 4$

Stąd $a = x(\lambda_a, \mu_a)$, $b = x(\lambda_b, \mu_b)$, $c = x(\lambda_c, \mu_c)$, $d = x(\lambda_d, \mu_d)$.

Niech $f : P^n \to P^n$ będzie przekształceniem rzutowym takim, że $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \{\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$, gdzie

$$\overline{x}_j = \alpha_{0j}x_0 + \alpha_{1j}x_1 + \ldots + \alpha_{nj}x_n, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Łatwo widać, że f przekształca punkty a, b, c, d odpowiednio na punkty

$$\begin{aligned}
\overline{a} &= \{\lambda_a\overline{p}_0 + \mu_a\overline{q}_0, \ldots, \lambda_a\overline{p}_n + \mu_a\overline{q}_n\} \\
\overline{b} &= \{\lambda_b\overline{p}_0 + \mu_b\overline{q}_0, \ldots, \lambda_b\overline{p}_n + \mu_b\overline{q}_n\} \\
\overline{c} &= \{\lambda_c\overline{p}_0 + \mu_c\overline{q}_0, \ldots, \lambda_c\overline{p}_n + \mu_c\overline{q}_n\} \\
\overline{d} &= \{\lambda_d\overline{p}_0 + \mu_d\overline{q}_0, \ldots, \lambda_d\overline{p}_n + \mu_d\overline{q}_n\}
\end{aligned}$$

Zatem $(a,b;c,d) = (\overline{a}, \overline{b}; \overline{c}, \overline{d})$ i dowód jest zakończony. $\square$

Definicja. L – prosta rzutowa w P^n, $a, b, c, d \in L$

Czwórka punktów a, b, c, d nazywa się *harmoniczna* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ $(a,b;c,d) = -1$.

Wtedy punkt d nazywa się *czwarty harmoniczny punktów* a, b, c. Mówimy również, że pary a, b i c, d są *harmonicznie sprzężone.*

Przykład. Jeśli $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$, $c = \frac{a+b}{2}$ i $p_\infty \in L(a, b) \cap (P^n \setminus \mathbb{R}^n)$, to pary a, b i c, p_∞ są harmonicznie sprzężone. Istotnie, mamy $a = \{1, a_1, \ldots, a_n\}$, $b = \{1, b_1, \ldots, b_n\}$, $c = \{1, \frac{a_1+b_1}{2}, \ldots, \frac{a_n+b_n}{2}\}$ oraz $p_\infty = \{0, b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n\}$. Stąd

$$(a, b; c, p_\infty) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{1 \cdot (-\frac{1}{2})} = -1.$$

Twierdzenie. Jeżeli czwórka $(a, b; c, d)$ jest harmoniczna, to również czwórki $(a, b; d, c)$, $(b, a; c, d)$, $(b, a; d, c)$ i $(c, d; a, b)$ są harmoniczne.

Dowód. Wynika z własności stosunku anharmonicznego. □

Twierdzenie. Czwórka harmoniczna oraz czwarty harmoniczny są niezmiennikami rzutowymi.

Dowód. Wynika z faktu, że stosunek anharmoniczny jest niezmiennikiem rzutowym. □

Definicja. (Płaszczyzna rzutowa w P^n)

W P^2 istnieje dokładnie jedna płaszczyzna rzutowa. Jest nią P^2.

Jeżeli są zdefiniowane płaszczyzny rzutowe w P^{n-1}, to płaszczyznami rzutowymi w P^n są:

1) płaszczyzny w $\mathbb{R}^n$ wraz z punktami niewłaściwymi prostych leżących w tych płaszczyznach (*płaszczyzny właściwe*),

2) zbiory punktów postaci $\{0, x_1, \ldots, x_n\}$ takie, że zbiór punktów $\{x_1, \ldots, x_n\} \in P^{n-1}$ tworzy płaszczyznę rzutową w P^{n-1} (*płaszczyzny niewłaściwe*).

Uwaga. Zbiór punktów niewłaściwych płaszczyzny właściwej w P^n jest prostą niewłaściwą.

Uwaga. Podobnie definiuje się k-wymiarową hiperpłaszczyznę rzutową w P^n.

Uwaga. Zbiór punktów niewłaściwych przestrzeni P^n jest $(n-1)$-wymiarową hiperpłaszczyznę rzutową niewłaściwą. W szczególności zbiór punktów niewłaściwych przestrzeni P^3 jest płaszczyzną niewłaściwą.

Twierdzenie. Każde dwie różne proste w P^2 mają dokładnie jeden punkt wspólny (właściwy lub niewłaściwy).

Dowód. Wynika z definicji prostej rzutowej. □

Twierdzenie. Każde dwie różne płaszczyzny w P^3 mają dokładnie jedną prostą wspólną (właściwą lub niewłaściwą).

Dowód. Wynika z definicji płaszczyzny rzutowej. □

Definicja. (**Wielomian jednorodny**)

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – wielomian n zmiennych, $\varphi(x) = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_n} \alpha_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$, gdzie

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $i_1, \ldots, i_n \in \{0, \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\deg(\varphi) = k$

φ jest *jednorodny* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ $(\alpha_{i_1\ldots i_n} \neq 0 \;\Rightarrow\; i_1 + \ldots + i_n = k)$.

Przykład.
1. $\varphi(x) = 2x_1x_2x_3 + x_1x_2^2 - x_3^3$ jest wielomianem jednorodnym stopnia 3 oraz 3 zmiennych.
2. $\varphi(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1$ jest wielomianem niejednorodnym.

Definicja. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – wielomian jednorodny stopnia k

Równanie $\varphi(x) = 0$ nazywa się *jednorodne* stopnia k.

Definicja. (**Zbiór algebraiczny w** P^n)

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – wielomian jednorodny stopnia k, $F \subseteq P^n$

Zbiór algebraiczny w P^n stopnia k:

$$F \underset{df}{=} \{\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in P^n : \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0\}\,.$$

Będziemy pisać $F : \varphi(x) = 0$.

Uwagi. Podobnie jak w $\mathbb{R}^n$:
1. Zbiory algebraiczne stopnia 0 w P^n: $\emptyset$ i P^n.
2. Zbiory algebraiczne stopnia 1 w P^n: $(n-1)$-wymiarowe hiperpłaszczyzny rzutowe.
3. Zbiory algebraiczne stopnia k w P^1: zbiory k-punktowe.

Uwaga. Równanie jednorodne stopnia 1 nazywa się *liniowe jednorodne*.

Przykład. Równanie $\varphi(x) = \alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 + \ldots + \alpha_nx_n = 0$ jest liniowe jednorodne.

Twierdzenie. (**Równanie liniowe jednorodne prostej w** P^2)

Każda prosta w P^2 ma równanie $\alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = 0$, gdzie $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0, 0)$.

Dowód. Jeśli $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ i $\alpha_0 \neq 0$, to równanie $\alpha_0x_0 = 0$ opisuje w P^2 zbiór punktów postaci $\{0, x_1, x_2\}$, czyli prostą niewłaściwą.

Jeśli $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, to dla punktów właściwych $\{1, x_1, x_2\}$ równanie $\alpha_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = 0$ opisuje prostą w $\mathbb{R}^2$. Kierunek $\{0, x_1, x_2\}$ tej prostej jest prostopadły do wektora $[\alpha_1, \alpha_2]$, czyli $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = 0$. Zatem prosta w P^2 zawsze daje się opisać powyższym równaniem. $\square$

Twierdzenie. (**Równanie liniowe jednorodne płaszczyzny w** P^3)

Każda płaszczyzna w P^3 ma równanie $\alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 = 0$, gdzie $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0, 0)$.

Dowód. Podobny do dowodu poprzedniego twierdzenia. $\square$

Twierdzenie. $L \subseteq P^2$ – prosta, $a = \{a_0, a_1, a_2\}, b = \{b_0, b_1, b_2\} \in L,\ \ a \neq b$

Wtedy

$$L : \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dowód. Łatwy. $\square$

Twierdzenie. $P \subseteq P^3$ – płaszczyzna, $a = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}, b = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}, c = \{c_0, c_1, c_2, c_3\} \in P$,

a, b, c nie leżą na jednej prostej w P^3

Wtedy

$$P : \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dowód. Łatwy. $\square$

Uwaga. $P, Q \subseteq P^3$ – płaszczyzny

Wtedy $P \cap Q = L$ jest prostą (właściwą lub niewłaściwą). Jeśli $P : \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ i $Q : \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0$, to

$$L : \begin{cases} \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \\ \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Jest to *równanie krawędziowe* prostej L w P^3.

Twierdzenie. Zbiór algebraiczny w P^n i jego stopień są niezmiennikami rzutowymi.

Dowód. Podobny do dowodu faktu, że zbiór algebraiczny w $\mathbb{R}^n$ i jego stopień są niezmiennikami afinicznymi. $\square$

Twierdzenie. (**O położeniu prostej względem zbioru algebraicznego stopnia k w P^n**)

$L, F \subseteq P^n$, L – prosta, F – zbiór algebraiczny stopnia k

Wówczas

$$L \subseteq F \quad \vee \quad 0 \leqslant \overline{\overline{L \cap F}} \leqslant k.$$

Dowód. Podobny do dowodu analogicznego twierdzenia w $\mathbb{R}^n$. $\square$

Twierdzenie. (**O ujednorodnianiu wielomianu**)

Dla każdego wielomianu $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stopnia k istnieje wielomian jednorodny $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ stopnia k taki, że

$$\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0^k \cdot \varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Dowód. Mamy $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_n} \alpha_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$, gdzie $i_1 + \ldots + i_n \leqslant k$ dla każdych $i_1, \ldots, i_n$. Wtedy

$$\begin{aligned}\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= x_0^k \cdot \varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)\\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n} \alpha_{i_1\ldots i_n} x_0^k \cdot \frac{x_1^{i_1}}{x_0^{i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n^{i_n}}{x_0^{i_n}}\\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n} \alpha_{i_1\ldots i_n} x_0^{k-(i_1+\ldots+i_n)} \cdot x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}.\end{aligned}$$

Niech $i_0 = k - (i_1 + \ldots + i_n)$. Wówczas

$$\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \alpha_{i_1\ldots i_n} x_0^{i_0} \cdot x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$$

oraz $i_0 + i_1 + \ldots + i_n = k$, czyli ψ jest wielomianemm jednorodnym. $\square$

Twierdzenie. $F : \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ – zbiór algebraiczny stopnia k w $\mathbb{R}^n$

Wówczas $F^* : x_0^k \cdot \varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0$ jest zbiorem algebraicznym w P^n takim, że $\deg(F^*) \leqslant \deg(F)$ oraz $F^* \cap \mathbb{R}^n = F$.

Dowód. Oczywiście $\deg(F^*) \leqslant \deg(F)$. Niech $x_0 \neq 0$. Wtedy

$$x_0^k \cdot \varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in F.$$

Stąd $F^* \cap \mathbb{R}^n = F$. $\square$

Uwaga. Zbiór F^* jest nazywany zbiorem algebraicznym *zupełnym* lub *uzupełnieniem* zbioru F.

Stożkowe zupełne w P^2:

1. Parabola zupełna

$$P^* : x_2^2 - 2dx_0x_1 = 0 \;-\; \text{równanie kanoniczne paraboli zupełnej w } P^2.$$

Jeśli $x_0 = 0$, to $x_2^2 = 0$, czyli $x_2 = 0$. Stąd $\{0, 1, 0\}$ jest jedynym punktem niewłaściwym paraboli w $\mathbb{R}^2$ w położeniu kanonicznym.

Wniosek. Parabola ma dokładnie jeden punkt niewłaściwy.

2. Elipsa

$$E : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = x_0^2 \ - \text{ równanie kanoniczne elipsy w } P^2.$$

Jeśli $x_0 = 0$, to $x_1 = x_2 = 0$. W przestrzeni rzutowej P^2 nie istnieje punkt $\{0, 0, 0\}$. Stąd nie istnieją punkty niewłaściwe spełniające powyższe równanie.

Wniosek. Elipsa nie ma punktów niewłaściwych.

3. Hiperbola zupełna

$$H^* : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = x_0^2 \ - \text{ równanie kanoniczne hiperboli zupełnej w } P^2.$$

Jeśli $x_0 = 0$, to $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0$, czyli $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2$ lub $x_1 = -\alpha_1, x_2 = \alpha_2$. Stąd $\{0, \alpha_1, \alpha_2\}$ i $\{0, -\alpha_1, \alpha_2\}$ są punktami niewłaściwymi hiperboli w $\mathbb{R}^2$ w położeniu kanonicznym.

Wniosek. Hiperbola ma dokładnie dwa punkty niewłaściwe.

Twierdzenie. Liczba punktów niewłaściwych zbioru algebraicznego jest niezmiennikiem afinicznym.

Dowód. Wynika z definicji przekształcenia rzutowego afinicznego. $\square$

Wniosek. (**Klasyfikacja afiniczna stożkowych**)

Istnieją dokładnie trzy klasy afiniczne stożkowych: parabola, elipsa i hiperbola.

Twierdzenie. (**Klasyfikacja rzutowa stożkowych**)

Wszystkie stożkowe należą do tej samej klasy rzutowej.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że przekształcenie rzutowe

$$\begin{cases} \overline{x}_0 = -\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1, \\ \overline{x}_1 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1, \\ \overline{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

przekształca parabolę zupełną $x_2^2 - x_0x_1 = 0$ na hiperbolę zupełną $\overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2 = \overline{x}_0^2$, a przekształcenie rzutowe

$$\begin{cases} \overline{\overline{x}}_0 = \overline{x}_1, \\ \overline{\overline{x}}_1 = \overline{x}_2, \\ \overline{\overline{x}}_2 = \overline{x}_0 \end{cases}$$

przekształca hiperbolę zupełną $\overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2 = \overline{x}_0^2$ na elipsę $\overline{\overline{x}}_1^2 + \overline{\overline{x}}_2^2 = \overline{\overline{x}}_0^2$. $\square$

Inne zbiory algebraiczne stopnia 2 w P^2:

1. Zbiór 1-punktowy oczywiście albo ma jeden punkt niewłaściwy albo nie.

2. Suma dwu prostych właściwych równoległych w $\mathbb{R}^2$ ma dokładnie jeden punkt niewłaściwy: kierunek tych prostych.

3. Suma dwu prostych właściwych przecinających się w $\mathbb{R}^2$ ma dokładnie dwa punkty niewłaściwe: kierunki tych prostych.

4. Suma prostej właściwej i prostej niewłaściwej ma nieskończenie wiele punktów niewłaściwych tworzących prostą niewłaściwą.

Kwadryki zupełne w P^3:

1. Elipsoida

$$E : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = x_0^2 \ - \ \text{równanie kanoniczne elipsoidy w } P^3.$$

Jeśli $x_0 = 0$, to $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. W przestrzeni rzutowej P^3 nie istnieje punkt $\{0, 0, 0, 0\}$. Stąd nie istnieją punkty niewłaściwe spełniające powyższe równanie.

Wniosek. Elipsoida nie ma punktów niewłaściwych.

2. Hiperboloida 1-powłokowa zupełna

$$H_1^* : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = x_0^2 - \text{równanie kanoniczne hiperboloidy}$$
$$1-\text{powłokowej zupełnej w } P^3.$$

Jeśli $x_0 = 0$, to $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0$. Jest to równanie pewnej stożkowej zupełnej w płaszczyźnie niewłaściwej.

Wniosek. Hiperboloida 1-powłokowa ma nieskończenie wiele punktów niewłaściwych, które w płaszczyźnie niewłaściwej tworzą pewną stożkową zupełną.

3. Hiperboloida 2-powłokowa zupełna

$$H_2^* : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = -x_0^2 - \text{równanie kanoniczne hiperboloidy}$$
$$2-\text{powłokowej zupełnej w } P^3.$$

Jeśli $x_0 = 0$, to $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0$. Jest to równanie pewnej stożkowej zupełnej w płaszczyźnie niewłaściwej.

Wniosek. Hiperboloida 2-powłokowa ma nieskończenie wiele punktów niewłaściwych, które w płaszczyźnie niewłaściwej tworzą pewną stożkową zupełną.

4. Paraboloida eliptyczna zupełna

$$PE^* : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 2x_0x_3 \text{ -- równanie kanoniczne paraboloidy}$$

$$\text{eliptycznej zupełnej w } P^3.$$

Jeśli $x_0 = 0$, to $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0$, czyli $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$. Stąd $\{0,0,0,1\}$ jest jedynym punktem niewłaściwym paraboloidy eliptycznej w $\mathbb{R}^3$ w położeniu kanonicznym.

Wniosek. Paraboloida eliptyczna ma dokładnie jeden punkt niewłaściwy.

5. Paraboloida hiperboliczna zupełna

$$PH^* : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 2x_0x_3 \text{ -- równanie kanoniczne paraboloidy}$$

$$\text{hiperbolicznej zupełnej w } P^3.$$

Jeśli $x_0 = 0$, to $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0$, czyli $\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2}$ lub $\frac{x_1}{\alpha_1} = -\frac{x_2}{\alpha_2}$. Są to równania dwu prostych w płaszczyźnie niewłaściwej.

Wniosek. Paraboloida hiperboliczna ma nieskończenie wiele punktów niewłaściwych, które w płaszczyźnie niewłaściwej tworzą dwie proste rzutowe.

Twierdzenie. (**Klasyfikacja afiniczna kwadryk**)

Istnieje dokładnie pięć klas afinicznych kwadryk: elipsoida, hiperboloida 1-powłokowa, hiperboloida 2-powłokowa, paraboloida eliptyczna i paraboloida hiperboliczna.

Dowód. Przekształcenie rzutowe afiniczne $P^3 \to P^3$ przekształca płaszczyznę niewłaściwą na siebie. Stąd zbiór punktów niewłaściwych kwadryki przechodzi przy takim przekształceniu na zbiór punktów niewłaściwych. Zatem elipsoidy, hiperboloidy, paraboloidy eliptyczne i paraboloidy hiperboliczne różnią się afinicznie (bo mają różne zbiory punktów niewłaściwych). Ponadto hiperboloida 1-powłokowa oraz hiperboloida 2-powłokowa różnią się afinicznie, ponieważ pierwsza jest prostokreślna a druga nie. □

Twierdzenie. (**Klasyfikacja rzutowa kwadryk**)

Istnieją dokładnie dwie klasy rzutowe kwadryk: do pierwszej klasy należą elipsoidy, hiperboloidy 2-powłokowe zupełne oraz paraboloidy eliptyczne zupełne; do drugiej klasy – hiperboloidy 1-powłokowe zupełne i paraboloidy hiperboliczne zupełne.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że przekształcenie rzutowe

$$\begin{cases} \overline{x}_0 = x_3, \\ \overline{x}_1 = x_1, \\ \overline{x}_2 = x_2, \\ \overline{x}_3 = x_0 \end{cases}$$

przekształca elipsoidę $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = x_0^2$ na hiperboloidę 2-powłokową zupełną $\overline{x}_1^2+\overline{x}_2^2-\overline{x}_3^2 = -\overline{x}_0^2$, a przekształcenie rzutowe

$$\begin{cases} \overline{x}_0 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_3, \\ \overline{x}_1 = x_1, \\ \overline{x}_2 = x_2, \\ \overline{x}_3 = \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

przekształca paraboloidę eliptyczną zupełną $x_1^2 + x_2^2 = x_0x_3$ na elipsoidę $\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + \overline{x}_3^2 = \overline{x}_0^2$. Ponadto przekształcenie rzutowe

$$\begin{cases} \overline{x}_0 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_3, \\ \overline{x}_1 = x_1, \\ \overline{x}_2 = \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2}x_3 \\ \overline{x}_3 = x_2, \end{cases}$$

przekształca paraboloidę hiperboliczną zupełną $x_1^2 - x_2^2 = x_0x_3$ na hiperboloidę 1-powłokową zupełną $\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 - \overline{x}_3^2 = \overline{x}_0^2$. Stąd elipsoidy, hiperboloidy 2-powłokowe zupełne oraz paraboloidy eliptyczne zupełne należą do tej samej klasy rzutowej oraz hiperboloidy 1-powłokowe zupełne i paraboloidy hiperboliczne zupełne również należą do tej samej klasy rzutowej. Klasy te są różne, bo hiperboloidy 1-powłokowe i hiperboloidy 2-powłokowe nie mogą należeć do tej samej klasy rzutowej (pierwsze posiadają tworzące prostoliniowe a drugie nie). $\square$

Uwaga. Pierwsza klasa rzutowa składa się z kwadryk nieprostokreślnych a druga z prostokreślnych.

Inne zbiory algebraiczne stopnia 2 w P^3:

1. Stożek eliptyczny

$$SE : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = x_3^2 \ - \ \text{równanie kanoniczne stożka eliptycznego w } P^3.$$

Jeśli $x_0 = 0$, to $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = x_3^2$. Jest to równanie pewnej stożkowej zupełnej w płaszczyźnie niewłaściwej.

Wniosek. Stożek eliptyczny ma nieskończenie wiele punktów niewłaściwych, które w płaszczyźnie niewłaściwej tworzą pewną stożkową zupełną.

2. Walec eliptyczny zupełny

$$WE^* : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = x_0^2 \text{ -- równanie kanoniczne walca}$$
$$\text{eliptycznego zupełnego w } P^3.$$

Jeśli $x_0 = 0$, to $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0$, czyli $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$. Stąd $\{0, 0, 0, 1\}$ jest jedynym punktem niewłaściwym walca eliptycznego w $\mathbb{R}^3$ w położeniu kanonicznym.

Wniosek. Walec eliptyczny ma dokładnie jeden punkt niewłaściwy.

3. Walec paraboliczny zupełny

$$WP^* : x_2^2 = 2dx_0x_1 \text{ -- równanie kanoniczne walca}$$
$$\text{parabolicznego zupełnego w } P^3.$$

Jeśli $x_0 = 0$, to $x_2 = 0$. Jest to równanie prostej w płaszczyźnie niewłaściwej.

Wniosek. Walec paraboliczny ma nieskończenie wiele punktów niewłaściwych, które w płaszczyźnie niewłaściwej tworzą prostą rzutową.

4. Walec hiperboliczny zupełny

$$WH^* : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = x_0^2 \text{ -- równanie kanoniczne walca}$$
$$\text{hiperbolicznego zupełnego w } P^3.$$

Jeśli $x_0 = 0$, to $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0$, czyli $\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2}$ lub $\frac{x_1}{\alpha_1} = -\frac{x_2}{\alpha_2}$. Są to równania dwu prostych w płaszczyźnie niewłaściwej.

Wniosek. Walec hiperboliczny ma nieskończenie wiele punktów niewłaściwych, które w płaszczyźnie niewłaściwej tworzą dwie proste rzutowe.

Ponadto w P^3 mamy:

1. Zbiór 1-punktowy oczywiście albo ma jeden punkt niewłaściwy albo nie.

2. Suma dwu płaszczyzn właściwych równoległych w $\mathbb{R}^3$ ma nieskończenie wiele punktów niewłaściwych, które w płaszczyźnie niewłaściwej tworzą prostą rzutową.

3. Suma dwu płaszczyzn właściwych nierównoległych w $\mathbb{R}^3$ ma nieskończenie wiele punktów niewłaściwych, które w płaszczyźnie niewłaściwej tworzą dwie proste rzutowe.

4. Suma płaszczyzny właściwej i płaszczyzny niewłaściwej ma nieskończenie wiele punktów niewłaściwych tworzących płaszczyznę niewłaściwą.

Definicja. (**Przestrzeń kartezjańska zespolona n-wymiarowa**)

$$\mathbb{C}^n \underset{df}{=} \{(z_1, \ldots, z_n) : z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\}.$$

Definicja. $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ – przekształcenie

$f(z_1, \ldots, z_n) = (z'_1, \ldots, z'_n)$, gdzie $z'_j = \alpha_{0j} + \alpha_{1j} z_1 + \ldots + \alpha_{nj} z_n$ dla $j = 1, \ldots, n$

$A = [\alpha_{ij}],\ i, j = 1, \ldots, n$

Przekształcenie f nazywa się:

1) *izometria rzeczywista* $\underset{df}{\Leftrightarrow} \bigwedge\limits_{i,j} \alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ i A jest ortogonalna,

2) *izometria zespolona* $\underset{df}{\Leftrightarrow} \bigwedge\limits_{i,j} \alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ i A jest ortogonalna,

3) *podobieństwo rzeczywiste o współczynniku* $\lambda > 0$ $\underset{df}{\Leftrightarrow} \bigwedge\limits_{i,j} \alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ i $\frac{1}{\lambda} A$ jest ortogonalna,

4) *podobieństwo zespolone o współczynniku* $\lambda > 0$ $\underset{df}{\Leftrightarrow} \bigwedge\limits_{i,j} \alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ i $\frac{1}{\lambda} A$ jest ortogonalna,

5) *przekształcenie afiniczne rzeczywiste* $\underset{df}{\Leftrightarrow} \bigwedge\limits_{i,j} \alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ i A jest nieosobliwa,

6) *przekształcenie afiniczne zespolone* $\underset{df}{\Leftrightarrow} \bigwedge\limits_{i,j} \alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ i A jest nieosobliwa.

Uwaga. Następujące przenoszą się bez zmian do przestrzeni zespolonej $\mathbb{C}^n$:

1) definicje działań na punktach przestrzeni oraz prawa formalne, którym działania te podlegają,

2) pojęcie wektora jako pary uporządkowanej punktów,

3) arytmetyczne definicje równości wektorów, wektora swobodnego, działań na wektorach swobodnych, liniowej niezależności wektorów swobodnych,

4) pojęcia równoległości wektorów i ich kierunku,

5) pojęcie prostopadłości wektorów.

Definicja. $a, b \in \mathbb{C}^n$, $a \neq b$

Prosta zespolona w $\mathbb{C}^n$ jest zdefiniowana jako zbiór punktów postaci $x(t) = (1-t)a + tb$, gdzie $t \in \mathbb{C}$.

Uwaga. Wektory leżące na jednej prostej są równoległe, ich kierunek jest kierunkiem tej prostej.

Twierdzenie. $L \subseteq \mathbb{C}^n$ – prosta, $a \in L$, $\mathfrak{a} \parallel L$, $\mathfrak{a} \neq 0$

Wtedy

$$L : x(t) = a + t \cdot (\mathfrak{a}),\ \text{gdzie } t \in \mathbb{C}.$$

Dowód. Taki sam jak w $\mathbb{R}^n$. $\square$

Definicja. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{C}^n$ – wektory liniowo niezależne

Płaszczyzna zespolona w $\mathbb{C}^n$ jest zdefiniowana jako zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$.

Definicja. $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k \in \mathbb{C}^n$ – wektory liniowo niezależne

Hiperpłaszczyzna k-wymiarowa zespolona w $\mathbb{C}^n$ jest zdefiniowana jako zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$.

Uwaga. Równania liniowe prostej w $\mathbb{C}^2$, płaszczyzny w $\mathbb{C}^3$ i hiperpłaszczyzny $(n-1)$-wymiarowej w $\mathbb{C}^n$ przenoszą się bez zmian.

Uwaga. Następujące przenoszą się bez zmian do przestrzeni zespolonej $\mathbb{C}^n$:

1) definicja zbioru algebraicznego stopnia k,

2) niezmienniczość afiniczna zbioru algebraicznego i jego stopnia.

Definicja. (**Przestrzeń n-wymiarowa rzutowa zespolona**)

Przestrzeń n-wymiarowa rzutowa zespolona CP^n jest zdefiniowana jako zbiór wszystkich układów uporządkowanych $\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$, złożonych z $n+1$ liczb zespolonych, nie wszystkich jednocześnie równych 0, gdzie układy proporcjonalne uważa się zawsze za jeden i ten sam punkt.

Definicja.

Punkty właściwe w $CP^n \underset{df}{=}$ punkty postaci $\{z_0, z_1, \ldots, z_n\} = \left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}\right) \in \mathbb{C}^n$, gdzie $z_0 \neq 0$.

Punkty niewłaściwe w $CP^n \underset{df}{=}$ punkty postaci $\{0, z_1, \ldots, z_n\} \in CP^n$.

Definicja. $f : CP^n \xrightarrow{onto} CP^n, \ \ \{z_0, z_1, \ldots, z_n\} \in CP^n$

f jest *przekształceniem rzutowym zespolonym* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ $f(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \{z'_0, z'_1, \ldots, z'_n\}$, gdzie $z'_j = \alpha_{0j} z_0 + \alpha_{1j} z_1 + \ldots + \alpha_{nj} z_n$ dla $j = 0, 1, \ldots, n$ oraz macierz przekształcenia f:

$$A_f = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{10} & \ldots & \alpha_{n0} \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{0n} & \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa.

Jeśli wszystkie $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, to f nazywa się *przekształcenie rzutowe rzeczywiste*.

Uwaga. Bezpośrednio z definicji widać, że przekształcenie rzutowe jest wzajemnie jednoznaczne.

Uwaga. Podobnie jak w P^n każde przekształcenie afiniczne (w szczególności każdą izometrię) $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ można uważać za pewne przekształcenie rzutowe $CP^n \to CP^n$, przy którym punkty właściwe przechodzą na właściwe, a niewłaściwe na niewłaściwe.

Definicja. $a = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}, b = \{b_0, b_1, \dots, b_n\} \in CP^n, \;\; a \neq b$

Prosta rzutowa zespolona w CP^n jest zdefiniowana jako zbiór punktów postaci $x(\lambda, \mu) = \{\lambda a_0 + \mu b_0, \lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_n + \mu b_n\}$, gdzie $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Twierdzenie. Przez każde dwa różne punkty przestrzeni CP^n przechodzi dokładnie jedna prosta rzutowa zespolona.

Dowód. Podobny do dowodu analogicznego twierdzenia w P^n. $\square$

Wniosek. W przestrzeni CP^n prosta zawierająca dwa różne punkty niewłaściwe składa się wyłącznie z punktów niewłaściwych (jest prostą niewłaściwą). Prosta zawierająca co najmniej jeden punkt właściwy (czyli prosta właściwa) zawiera dokładnie jeden punkt niewłaściwy.

Wniosek. Przestrzeń CP^n otrzymuje się z przestrzeni $\mathbb{C}^n$ w podobny sposób jak przestrzeń P^n jest otrzymana z przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Wniosek. Każde dwie różne proste na płaszczyźnie CP^2 przecinają się dokładnie w jednym punkcie (właściwym lub niewłaściwym).

Uwaga. Pojęcia płaszczyzna rzutowa zespolona oraz k-wymiarowa hiperpłaszczyzna rzutowa zespolona definiuje się w CP^n podobnie jak pojęcia płaszczyzna rzutowa oraz k-wymiarowa hiperpłaszczyzna rzutowa w P^n.

Uwaga. Następujące przenoszą się bez zmian do przestrzeni rzutowej zespolonej CP^n:

1) definicja zbioru algebraicznego stopnia k,

2) niezmienniczość rzutowa zbioru algebraicznego i jego stopnia.

Wniosek. Jeżeli $F : \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ jest zbiorem algebraicznym stopnia k w $\mathbb{C}^n$, to $F^* : \psi(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ jest uzupełnieniem zbioru F w CP^n, gdzie $\psi(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^k \cdot \varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ jest wielomianem jednorodnym.

Twierdzenie. (**O położeniu prostej względem zbioru algebraicznego stopnia $k \geqslant 1$ w CP^n**)

$L, F \subseteq CP^n$, L – prosta, $\;F$ – zbiór algebraiczny stopnia $k \geqslant 1$

Wówczas

$$L \subseteq F \quad \vee \quad 1 \leqslant \overline{\overline{L \cap F}} \leqslant k.$$

Dowód. Podobny do dowodu analogicznego twierdzenia w $\mathbb{R}^n$. $\square$

Twierdzenie. (**O uzupełnianiu**)

$F : \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ – zbiór algebraiczny stopnia k w $\mathbb{C}^n$, $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0^k \cdot \varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0$

Wówczas $F^* : \psi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$ jest zbiorem algebraicznym stopnia k w CP^n, który otrzymuje się z F przez dołączenie jego punktów niewłaściwych.

(bez dowodu)

Rozdział 10

Zbiory algebraiczne stopnia $\leqslant 2$ w CP^n i P^n

Wiemy, że hiperpłaszczyzny $(n-1)$-wymiarowe (właściwe lub niewłaściwe) są zbiorami algebraicznymi stopnia 1 w CP^n (P^n).

Rozpatrzmy teraz zbiory algebraiczne stopnia 2 w CP^n (P^n). Takie zbiory są opisane równaniami stopnia 2, w których występuje wielomian jednorodny stopnia 2 nazywany formą kwadratową.

Przypomnijmy, że *forma kwadratowa* to funkcja φ taka, że

$$\varphi(x) = \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

gdzie $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

Wtedy

$$\mathfrak{M}(\varphi) = [\alpha_{ij}],\ \ i,j = 0,1,\ldots,n \ \ - \ \ \textit{duża macierz} \text{ formy } \varphi,$$

$$\mathfrak{m}(\varphi) = [\alpha_{ij}],\ \ i,j = 1,\ldots,n \ \ - \ \ \textit{mała macierz} \text{ formy } \varphi,$$

$$\Delta(\varphi) = \det(\mathfrak{M}(\varphi)) \ \ - \ \ \textit{duży wyróżnik} \text{ formy } \varphi,$$

$$\delta(\varphi) = \det(\mathfrak{m}(\varphi)) \ \ - \ \ \textit{mały wyróżnik} \text{ formy } \varphi$$

oraz

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} x_j = \alpha_{i0}x_0 + \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n \; - \; \textit{ity wielomian pochodny}$$

formy φ dla $i = 0, 1, \ldots, n$.

Zatem

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{2}\varphi'_{x_i}(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \text{ dla } i = 0, 1, \ldots, n,$$

gdzie $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ oznacza pochodną cząstkową funkcji φ, czyli pochodną funkcji φ ze względu na zmienną x_i.

Wniosek. F – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ w CP^n (P^n)

φ – forma kwadratowa, $\varphi(x) = \sum\limits_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$

Wtedy

$$F : \varphi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad F : \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) \cdot x_i = 0.$$

Definicja. F – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ w CP^n (P^n), L – prosta

Wiemy, że $L \cap F = \emptyset \;\vee\; L \subset F \;\vee\; \overline{\overline{L \cap F}} = 1 \;\vee\; \overline{\overline{L \cap F}} = 2$. Jeśli $L \cap F = \{a\}$, to L jest nazywana *prostą styczną do F w punkcie a.*

Twierdzenie. Prosta styczna do zbioru algebraicznego stopnia $\leqslant 2$ jest niezmiennikiem rzutowym.

Dowód. Wynika wprost z definicji. □

Definicja. F – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ w CP^n (P^n)

Asymptota zbioru $F \underset{df}{=}$ prosta styczna do F w punkcie niewłaściwym.

Przykłady.
1. Parabola ma jedną asymptotę niewłaściwą.
2. Elipsa nie ma asymptot.
3. Hiperbola ma dwie asymptoty właściwe.

Twierdzenie. Asymptota zbioru algebraicznego stopnia $\leqslant 2$ jest niezmiennikiem afinicznym.

Dowód. Wynika wprost z definicji. □

Definicja. F – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ w CP^n (P^n), $a \in F$

$$S(a) \underset{df}{=} \text{ suma wszystkich prostych stycznych do } F \text{ w punkcie } a.$$

Uwaga. Mamy:

$$S(a) = CP^n \ \vee \ S(a) \text{ jest hiperpłaszczyną } (n-1)\text{−wymiarową.}$$

Definicja. F – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ w CP^n (P^n), $a \in F$

a jest *punktem osobliwym* zbioru $F \underset{df}{\Leftrightarrow} S(a) = CP^n$ (P^n),

a jest *punktem regularnym* zbioru $F \underset{df}{\Leftrightarrow} S(a) = H^{n-1}$.

Kierunek osobliwy zbioru $F \underset{df}{=}$ punkt osobliwy niewłaściwy zbioru F.

Przykłady.

1. Prosta – każdy punkt jest osobliwy.
2. Para prostych przecinających się – punkt przecięcia jest punktem osobliwym.
3. Para prostych równoległych – kierunek tych prostych jest kierunkiem osobliwym.
4. Stożkowe – brak punktów osobliwych.
5. Stożek – wierzchołek jest osobliwy.
6. Walec – kierunek tworzącej jest osobliwy.
7. Kwadryki – brak punktów osobliwych.

Twierdzenie. $F : \varphi(x) = 0$, $a \in F$

Wtedy

a jest osobliwy $\Leftrightarrow \varphi_i(a) = 0$ dla $i = 0, \dots, n$,

a jest regularny $\Leftrightarrow \bigvee\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} \varphi_i(a) \neq 0$,

gdzie φ_i jest $i$tym wielomianem pochodnym formy φ dla $i = 0, 1, \dots, n$.

Dowód. $F : \varphi(x) = \sum\limits_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$

$a = \{a_0, a_1, \dots, a_n\} \in F$, $b = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in CP^n$, $a \neq b$

Załóżmy, że a jest osobliwy, czyli każda prosta przechodząca przez a jest styczna do F. Weźmy prostą

$$L(a, b) : x(\lambda, \mu) = \{\lambda a_0 + \mu x_0, \lambda a_1 + \mu x_1, \dots, \lambda a_n + \mu x_n\}, \text{ gdzie } (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Wtedy punkt a spełnia równanie

$$\sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} (\lambda a_i + \mu x_i)(\lambda a_j + \mu x_j) = 0$$

równoważne równaniu

$$\lambda^2 \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i a_j + 2\lambda\mu \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i x_j + \mu^2 \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0.$$

Oznacza to, że musi być

$$\sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i x_j = 0.$$

Powyższe równanie jest równoważne równaniu

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i x_j = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} a_i = \varphi_j(a) = 0 \text{ dla } j = 0, 1, \ldots, n.$$

Zatem a jest osobliwy $\Leftrightarrow \varphi_i(a) = 0$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$.
Druga część twierdzenia wynika bezpośrednio z pierwszej. $\square$

Twierdzenie.

F ma conajmniej jeden punkt osobliwy $\Leftrightarrow \Delta(\varphi) = 0$.

Dowód. $F : \varphi(x) = 0$, φ – forma kwadratowa, $a \in F$

Mamy

a jest punktem osobliwym zbioru $F \Leftrightarrow \varphi_i(a) = 0$ dla $i = 0, 1, \ldots, n \Leftrightarrow \sum\limits_{j=0}^{n} \alpha_{ij} a_j = 0$ dla $i = 0, 1, \ldots, n \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_{00}a_0 + \alpha_{01}a_1 + \ldots + \alpha_{0n}a_n = 0 \\ \alpha_{10}a_0 + \alpha_{11}a_1 + \ldots + \alpha_{1n}a_n = 0 \\ \quad \vdots \\ \alpha_{n0}a_0 + \alpha_{n1}a_1 + \ldots + \alpha_{nn}a_n = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \det(\mathfrak{M}(\varphi)) = \Delta(\varphi) = 0$. $\square$

Wniosek.

F nie ma punktów osobliwych $\Leftrightarrow \Delta(\varphi) \neq 0$.

Twierdzenie. Punkt osobliwy zbioru algebraicznego stopnia $\leqslant 2$ w CP^n (P^n) jest niezmiennikiem rzutowym (a więc również afinicznym).

Dowód. Wynika wprost z definicji. $\square$

Twierdzenie. Kierunek osobliwy zbioru algebraicznego stopnia $\leqslant 2$ w CP^n (P^n) jest niezmiennikiem afinicznym.

Dowód. Wynika wprost z definicji. $\square$

Definicja. F – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ w CP^n (P^n), $a \in F$ – punkt regularny zbioru F

Hiperpłaszczyzna styczna do F w punkcie a $\underset{df}{=}$ $S(a) = H^{n-1}$.

Definicja. F – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ w CP^n (P^n)

Hiperpłaszczyzna asymptotyczna zbioru F $\underset{df}{=}$ hiperpłaszczyzna styczna do F w punkcie niewłaściwym.

Uwaga. Jeżeli punkt niewłaściwy zbioru F jest również punktem osobliwym (czyli jest kierunkiem osobliwym), to nie istnieje hiperpłaszczyzna styczna do F w tym punkcie (nie istnieje hiperpłaszczyzna asymptotyczna).

Twierdzenie. Hiperpłaszczyzna asymptotyczna zbioru algebraicznego stopnia $\leqslant 2$ w CP^n (P^n) jest niezmiennikiem afinicznym.

Dowód. Wynika wprost z definicji. $\square$

Definicja. (**Hiperpłaszczyzna biegunowa**)

F – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ w CP^n, $F : \varphi(x) = \sum\limits_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$

$a \in CP^n$, a nie jest punktem osobliwym zbioru F

Wtedy

1) $a \in F$ (z założenia jest regularny)

Definiujemy

$$B(a) \underset{df}{=} S(a),$$

czyli jest to hiperpłaszczyzna styczna do F w punkcie a.

Wtedy

$$B(a) : \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i x_j = 0.$$

2) $a \notin F$, $\mathcal{W}$ – wiązka wszystkich prostych w CP^n przechodzących przez a

Niech $L \in \mathcal{W}$. Wtedy $1 \leqslant \overline{\overline{L \cap F}} \leqslant 2$, czyli $L \cap F = \{p, q\}$, gdzie $p = q$ lub $p \neq q$. Z każdej prostej $L \in \mathcal{W}$ wybieramy dokładnie jeden punkt x, który zaliczamy do $B(a)$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned} p = q \ &\Rightarrow x = p = q, \\ p \neq q \ &\Rightarrow x \text{ jest czwartym harmonicznym punktów} \\ &\qquad p, q, a, \text{ czyli } (p, q; a, x) = -1. \end{aligned}$$

Wtedy wzór analityczny hiperpłaszczyzny $B(a)$ jest następujący

$$B(a) : \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(a) \cdot x_i = 0$$

lub

$$B(a) : \sum_{i=0}^{n} \varphi'_{x_i}(a) \cdot x_i = 0.$$

Nazywamy $B(a)$ *hiperpłaszczyzną biegunową punktu a względem F*, a punkt a – *biegunem hiperpłaszczyzny $B(a)$ względem F.*

Uwaga. Ponieważ $\varphi_i(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \alpha_{ij} x_j$, więc

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(a) \cdot x_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} a_j \right) x_i = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} x_i \right) a_j = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x) \cdot a_j.$$

Zatem

$$B(a) : \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) \cdot a_i = 0.$$

Twierdzenie. Hiperpłaszczyzna biegunowa punktu a względem zbioru algebraicznego stopnia $\leqslant 2$ w CP^n jest niezmiennikiem rzutowym.

Dowód. Wynika wprost z definicji. $\square$

Definicja. (**Hiperpłaszczyzna średnicowa**) F – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ w CP^n

Hiperpłaszczyzna średnicowa zbioru $F \underset{df}{=}$ biegunowa punktu niewłaściwego.

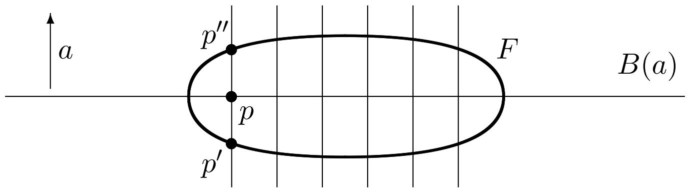
Jeśli a jest punktem niewłaściwym, to $B(a)$ jest *hiperpłaszczyzną średnicową zbioru F sprzężoną z kierunkiem a.*

Uwaga. Hiperpłaszczyzna średnicowa $B(a)$ nie jest zdefiniowana, gdy kierunek a jest osobliwy.

Uwaga. Jeśli punkt niewłaściwy a należy do zbioru F, to hiperpłaszczyzna średnicowa zbioru F sprzężona z kierunkiem a jest hiperpłaszczyzną asymptotyczną zbioru F.

Twierdzenie. F – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ w CP^n, $a \notin F$, a – niewłaściwy

Wówczas średnicowa $B(a)$ przechodzi przez środki cięciw o kierunku a:



Dowód. Ponieważ $a \notin F$, więc $B(a)$ jest hiperpłaszczyzną właściwą. Każda prosta L o kierunku a przecina zbiór F w conajwyżej 2 punktach p' i p''. Jeżeli $p' \neq p''$, to prosta L przecina $B(a)$ w takim punkcie p, że $(a, p; p', p'') = -1$. Ponieważ a jest niewłaściwy, więc p musi być środkiem odcinka $\langle p', p'' \rangle$. $\square$

Twierdzenie. Hiperpłaszczyzna średnicowa zbioru algebraicznego stopnia $\leqslant 2$ w CP^n jest niezmiennikiem afinicznym.

Dowód. Wynika wprost z definicji. $\square$

Definicja. (**Środek zbioru algebraicznego stopnia** $\leqslant 2$)

F – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ w CP^n (P^n), $a \in CP^n$ (P^n)

a jest *środkiem* zbioru F $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ a jest punktem osobliwym zbioru F lub a jest biegunem hiperpłaszczyzny niewłaściwej.

Wniosek. Środek zbioru algebraicznego stopnia $\leqslant 2$ jest niezmiennikiem afinicznym.

Twierdzenie. $F : \varphi(x) = \sum\limits_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$

Wówczas

a jest środkiem zbioru $F \Leftrightarrow \varphi_i(a) = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Dowód. $(\Rightarrow)$ Jeśli a jest punktem osobliwym, to $\varphi_i(a) = 0$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Stąd dostajemy tezę twierdzenia. Jeśli a jest biegunem hiperpłaszczyzny niewłaściwej, to z postaci równania hiperpłaszczyzny biegunowej $B(a)$ wynika teza.

$(\Leftarrow)$ Załóżmy, że $\varphi_i(a) = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Jeśli $\varphi_0(a) = 0$, to a jest osobliwy. Jeśli $\varphi_0(a) \neq 0$, to z postaci równania hiperpłaszczyzny biegunowej $B(a)$ wynika, że a jest biegunem hiperpłaszczyzny niewłaściwej. $\square$

Twierdzenie. Środki właściwe zbioru algebraicznego F leżące na F są jego punktami osobliwymi.

Dowód. Niech $F : \sum\limits_{i=0}^{n} \varphi_i(x) \cdot x_i = 0$, gdzie φ_i jest $i$tym wielomianem pochodnym formy φ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Jeśli $a = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ jest środkiem właściwym zbioru F i $a \in F$, to $\sum\limits_{i=0}^{n} \varphi_i(a) \cdot a_i = 0$ i $\varphi_i(a) = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Stąd $\varphi_0(a) \cdot a_0 = 0$. Ponieważ a jest właściwy, więc

$a_0 \neq 0$. Stąd $\varphi_0(a) = 0$. Zatem $\varphi_i(a) = 0$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$, czyli a jest punktem osobliwym zbioru F. $\square$

Twierdzenie. Środek właściwy zbioru F jest jego środkiem symetrii. Jeżeli F nie zawiera hiperpłaszczyzny niewłaściwej, to i na odwrót.

Dowód. Niech $F : \varphi(x) = \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$. Załóżmy, że $c = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, gdzie $c_0 = 1$, jest środkiem zbioru F. Niech $a = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ i $a' = \{a'_0, a'_1, \ldots, a'_n\}$ będą punktami symetrycznymi względem c, gdzie $a_0 = a'_0 = 1$. Wtedy $a'_i = 2c_i - a_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Pokażemy, że jeśli $a \in F$, to $a' \in F$. Mamy

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a'_i a'_j &= \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} (2c_i - a_i)(2c_j - a_j) \\ &= 4 \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} c_i \right) c_j - 4 \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} c_i \right) a_j + \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i a_j \\ &= 0,\end{aligned}$$

bo $\varphi_j(c) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} c_i = 0$ dla $j = 1, \ldots, n$, $c_0 = a_0 = 1$ oraz $\sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i a_j = 0$. Zatem $a' \in F$, czyli c jego środkiem symetrii zbioru F.

Załóżmy teraz, że F nie zawiera hiperpłaszczyzny niewłaściwej H_∞ oraz że $c = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, gdzie $c_0 = 1$, nie jest środkiem zbioru F. Pokażemy, że c nie jest środkiem symetrii zbioru F. Ponieważ $H_\infty \nsubseteq F$, więc równanie $\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j = 0$ opisuje w H_∞ pewien zbiór algebraiczny F' stopnia 1 lub 2. Ponadto c nie jest środkiem zbioru F, skąd równanie $\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} c_i \right) y_j = 0$ opisuje w H_∞ pewną $(n-2)$-wymiarową hiperpłaszczyznę H'. Niech $a \in H_\infty \backslash F'$ oraz $L' \subseteq H_\infty$ będzie prostą taką, że $a \in L'$ i $L' \nsubseteq H'$. Mamy $\overline{\overline{L' \cap F'}} \leqslant 2$ i $\overline{\overline{L' \cap H'}} \leqslant 1$. Stąd istnieje $b \in (L' \backslash F') \backslash H'$. Niech $b = \{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$, gdzie $b_0 = 0$. Zatem mamy

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} b_i b_j \neq 0 \neq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} c_i \right) b_j.$$

Weźmy prostą L taką, że $c \in L$ i $b \parallel L$. Stąd

$$L : x(t) = (c_0 + tb_0, c_1 + tb_1, \ldots, c_n + tb_n).$$

Punkt przecięcia prostej L i zbioru F znajdujemy z równania

$$\sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} (c_i + tb_i)(c_j + tb_j) = 0,$$

czyli

$$\sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} c_i c_j + 2t \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} c_i \right) b_j + t^2 \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} b_i b_j = 0.$$

Powyższe równanie ma dwa pierwiastki t' i t'' takie, że $t' + t'' \neq 0$. Zatem $L \cap F = \{x(t'), x(t'')\}$ oraz $x(t')$ i $x(t'')$ nie są symetryczne względem c, bo

$$\frac{x(t') + x(t'')}{2} = \left(c_0, c_1 + \frac{t' + t''}{2} b_1, \ldots, c_n + \frac{t' + t''}{2} b_n \right) \neq c.$$

Stąd c nie jest środkiem symetrii zbioru F. $\square$

Definicja. F – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$

Kierunek wyjątkowy zbioru $F \underset{df}{=}$ środek niewłaściwy zbioru F.

Wniosek. Kierunek osobliwy zbioru algebraicznego stopnia $\leqslant 2$ jest kierunkiem wyjątkowym.

Wniosek. Kierunek wyjątkowy zbioru algebraicznego stopnia $\leqslant 2$ jest niezmiennikiem afinicznym.

Twierdzenie. Środki niewłaściwe zbioru algebraicznego F leżą na F.

Dowód. Niech $F : \varphi(x) = 0$, gdzie φ jest formą kwadratową. Wtedy $F : \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) \cdot x_i = 0$, gdzie φ_i jest $i$tym wielomianem pochodnym formy φ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Niech $a = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ będzie środkiem niewłaściwym zbioru F. Wówczas $\varphi_i(a) = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Chcemy pokazać, że $\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(a) \cdot a_i = 0$. Mamy

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(a) \cdot a_i = \varphi_0(a) \cdot a_0 + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(a) \cdot a_i.$$

Ponieważ a jest niewłaściwy, więc mamy $a_0 = 0$. Ponieważ a jest środkiem, więc mamy również $\varphi_i(a) = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Stąd

$$\varphi_0(a) \cdot a_0 + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(a) \cdot a_i = \varphi_0(a) \cdot 0 + \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot a_i = 0.$$

Zatem $a \in F$. $\square$

Twierdzenie. Jeśli $F : \varphi(x) = 0$, to F posiada co najmniej jeden kierunek wyjątkowy $\Leftrightarrow$ $\delta(\varphi) = 0$.

Dowód. Niech $F : \varphi(x) = 0$, gdzie φ jest formą kwadratową. Niech $a = \{0, a_1, \ldots, a_n\}$. Wówczas a jest kierunkiem wyjątkowym zbioru $F \Leftrightarrow \varphi_i(a) = 0$ dla $i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} a_j = 0$ dla

$i = 1, \dots, n \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \ldots + \alpha_{1n}a_n = 0 \\ \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \ldots + \alpha_{2n}a_n = 0 \\ \quad \vdots \\ \alpha_{n1}a_1 + \alpha_{n2}a_2 + \ldots + \alpha_{nn}a_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \det(\mathfrak{m}(\varphi)) = \delta(\varphi) = 0.$ $\square$

Twierdzenie. Jeśli $F : \varphi(x) = 0$, to F ma dokładnie jeden środek właściwy $\Leftrightarrow \delta(\varphi) \neq 0$.

Dowód. Niech $F : \varphi(x) = 0$, gdzie φ jest formą kwadratową. Niech $a = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, gdzie $a_0 = 1$. Wówczas a jest środkiem właściwym zbioru $F \Leftrightarrow \varphi_i(a) = 0$ dla $i = 1, \dots, n \Leftrightarrow \sum\limits_{j=0}^{n} \alpha_{ij}a_j = 0$ dla $i = 1, \dots, n \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_{10} + \alpha_{11}a_1 + \ldots + \alpha_{1n}a_n = 0 \\ \alpha_{20} + \alpha_{21}a_1 + \ldots + \alpha_{2n}a_n = 0 \\ \quad \vdots \\ \alpha_{n0} + \alpha_{n1}a_1 + \ldots + \alpha_{nn}a_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}a_1 + \ldots + \alpha_{1n}a_n = -\alpha_{10} \\ \alpha_{21}a_1 + \ldots + \alpha_{2n}a_n = -\alpha_{20} \\ \quad \vdots \\ \alpha_{n1}a_1 + \ldots + \alpha_{nn}a_n = -\alpha_{n0} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \det(\mathfrak{m}(\varphi)) = \delta(\varphi) \neq 0.$ $\square$

Wniosek. Każdy zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ ma co najmniej jeden środek (właściwy lub niewłaściwy).

Przykłady.

1. Dla elipsy $E : \varphi(x) = \alpha_2^2 x_1^2 + \alpha_1^2 x_2^2 - \alpha_1^2\alpha_2^2 x_0^2 = 0$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ mamy

$$\delta(\varphi) = \begin{vmatrix} \alpha_2^2 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Zatem elipsa ma dokładnie jeden środek właściwy. Podobnie dla hiperboli.

2. Dla paraboli $P^* : \varphi(x) = x_2^2 - 2dx_0x_1 = 0$ mamy

$$\delta(\varphi) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd parabola ma co najmniej jeden środek niewłaściwy, który musi leżeć na paraboli. Ponieważ parabola ma doładnie jeden punkt niewłaściwy, więc ma ona doładnie jeden środek niewłaściwy. Podobnie dla paraboloidy eliptycznej i paraboloidy hiperbolicznej .

Uwaga. Podobnie pokazuje się dla pozostałych zbiorów algebraicznych stopnia $\leqslant 2$.

Uwaga. Jeżeli zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ nie ma środka właściwego (czyli środka symetrii), to może mieć co najmniej jeden wierzchołek leżący na przecięciu tego zbioru z jego hiperpłaszczyzną symetrii.

Twierdzenie. Jeżeli zbiór algebraiczny F ma kierunek wyjątkowy, to liczba środków symetrii zbioru F jest różna od 1.

Dowód. Niech $F : \varphi(x) = 0$, gdzie φ jest formą kwadratową. Ponieważ F ma kierunek wyjątkowy, to $\delta(\varphi) = 0$. Zatem nie jest prawdą, że $\delta(\varphi) \neq 0$, czyli F nie ma dokładnie jednego środka symetrii. $\square$

Twierdzenie. Hiperpłaszczyzna średnicowa zbioru algebraicznego F zawiera wszystkie środki zbioru F.

Dowód. Niech $F : \varphi(x) = 0$, gdzie φ jest formą kwadratową. Niech $B(a)$ będzie hiperpłaszczyzną średnicową zbioru F, gdzie $a = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Niech b będzie środkiem zbioru F. Wiemy, że $B(a) : \sum\limits_{i=0}^{n} \varphi_i(x) \cdot a_i = 0$ oraz $\varphi_i(b) = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Chcemy pokazać, że $b \in B(a)$, czyli

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(b) \cdot a_i = 0.$$

Ale

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(b) \cdot a_i = \varphi_0(b) \cdot 0 + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(b) \cdot a_i = 0,$$

bo $\varphi_i(b) = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Zatem $b \in B(a)$. $\square$

Definicja. (**Kierunek główny**)

F – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ w CP^n (P^n), $a = \{0, a_1, \ldots, a_n\}$

a jest *kierunkiem głównym* zbioru F $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ 1) $B(a)$ nie istnieje $\vee$ 2) $B(a)$ jest niewłaściwa $\vee$ 3) $B(a) \perp a$.

Wtedy:

1) a jest kierunkiem osobliwym,
2) a jest kierunkiem wyjątkowym,
3) a jest nazywany *kierunkiem głównym niewyjątkowym.*

Twierdzenie. (**O kierunkach głównych**) $F : \varphi(x) = 0, \ \ a = \{0, a_1, \dots, a_n\}$

Wówczas a jest kierunkiem głównym zbioru $F \Leftrightarrow$

$$\bigvee_{\lambda} \varphi_i(a) = \lambda a_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ponadto,

$\lambda = 0 \ \Leftrightarrow \ a$ jest kierunkiem wyjątkowym,

$\lambda \neq 0 \ \Leftrightarrow \ a$ jest kierunkiem niewyjątkowym.

Dowód. Wiemy, że $B(a) : \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(a) \cdot x_i = 0$. Jeśli a nie jest kierunkiem wyjątkowym, to nie wszystkie $\varphi_i(a)$ dla $i = 1, \dots, n$ są równe 0, czyli $B(a)$ jest właściwa. Dalej

$$B(a) \perp a \ \Leftrightarrow \ \bigvee_{\lambda} \varphi_i(a) = \lambda a_i, \quad i = 1, \dots, n$$

(czyli $\varphi_i(a)$ są proporcjonalne do a_i dla $i = 1, \dots, n$). Łatwo widać, że

$\lambda = 0 \ \Leftrightarrow \ a$ jest kierunkiem wyjątkowym, oraz
$\lambda \neq 0 \ \Leftrightarrow \ a$ jest kierunkiem niewyjątkowym. $\square$

Wniosek. Dla każdego zbioru algebraicznego stopnia 2 istnieje co najmniej jeden kierunek główny.

Twierdzenie. Hiperpłaszczyzna $(n-1)$-wymiarowa właściwa prostopadła do kierunku osobliwego zbioru algebraicznego F stopnia $\leqslant 2$ jest jego hiperpłaszczyzną symetrii (w P^n, CP^n).

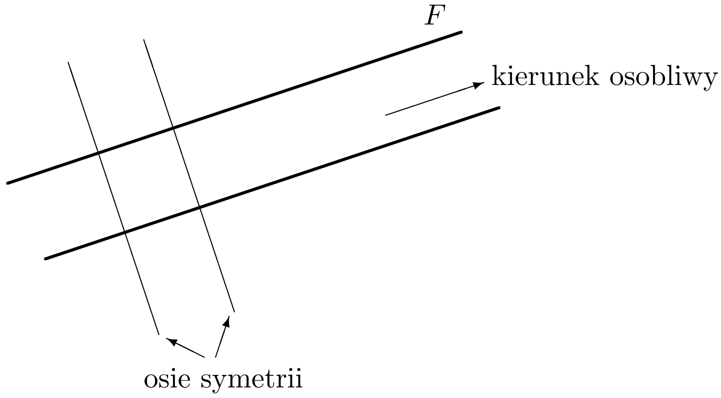
Dowód. Niech $F : \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$. Niech $a = \{0, a_1, \dots, a_n\}$ będzie kierunkiem osobliwym zbioru F, czyli, a jest wyjątkowy, tzn. $a \in F$. Niech H będzie $(n-1)$-wymiarową hiperpłaszczyzną właściwą taką, że $a \perp H$. Niech $b = \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$, $b' = \{b'_0, b'_1, \dots, b'_n\}$, gdzie $b_0 = b'_0 = 1$, będą punktami symetrycznymi względem H. Załóżmy, że $b \in F$, czyli $\sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} b_i b_j = 0$. Mamy $\{0, b_1 - b'_1, \dots, b_n - b'_n\} \perp H$. Stąd $b_i - b'_i = a_i$ dla $i = 1, \dots, n$, czyli $b'_i = b_i - a_i$. Zatem

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} b'_i b'_j &= \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} (b_i - a_i)(b_j - a_j) = \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} b_i b_j - 2 \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i b_j + \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i a_j \\ &= 0 - 2 \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i b_j + 0 = -2 \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} a_i \right) b_j = -2 \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(a) \cdot b_j = 0. \end{aligned}$$

Stąd $b' \in F$. Zatem H jest hiperpłaszczyzną symetrii zbioru F. $\square$

Wniosek. Prosta prostopadła do kierunku osobliwego zbioru algebraicznego stopnia $\leqslant 2$ w P^2 jest jego osią symetrii.

Przykład.



Definicja. (**Hiperpłaszczyzna średnicowa główna**)

Hiperpłaszczyzna średnicowa główna zbioru $F \underset{df}{=}$ hiperpłaszczyzna średnicowa zbioru F sprzężona z kierunkiem głównym niewyjątkowym.

Twierdzenie. Hiperpłaszczyzna średnicowa główna zbioru F jest hiperpłaszczyzną symetrii zbioru F.

Dowód. Niech $F : \sum\limits_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$. Niech $a = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}, a' = \{a'_0, a'_1, \ldots, a'_n\}$, gdzie $a_0 = a'_0 = 1$, będą punktami symetrycznymi względem hiperpłaszczyzny średnicowej głównej $B(b) : \sum\limits_{i=0}^{n} \varphi_i(b) \cdot x_i = 0$. Stąd $b \perp B(b)$ oraz $\{0, a_1 - a'_1, \ldots, a_n - a'_n\} \perp B(b)$. Biorąc $b_0 = 0$ możemy przyjąć $a_i - a'_i = b_i$, czyli $a'_i = a_i - b_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Załóżmy, że $a \in F$, czyli $\sum\limits_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i a_j = 0$. Zatem

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a'_i a'_j &= \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij}(a_i - b_i)(a_j - b_j) = \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i a_j - 2\sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i b_j + \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} b_i b_j \\ &= 0 + \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij}(b_i - 2a_i) b_j = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} b_j \right)(b_i - 2a_i) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(b)(a_i - a'_i - 2a_i) \\ &= -\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(b)(a_i + a'_i) = 0,\end{aligned}$$

bo

$$\{a_0 + a'_0, a_1 + a'_1, \ldots, a_n + a'_n\} = \left\{1, \frac{a_1 + a'_1}{2}, \ldots, \frac{a_n + a'_n}{2}\right\} \in B(b)$$

(jako środek odcinka $\langle a, a' \rangle$).
Stąd $a' \in F$. Zatem $B(b)$ jest hiperpłaszczyzną symetrii zbioru F. $\square$

Definicja.

Równanie $\sum\limits_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$ ma *postać kanoniczną pierwszego rodzaju* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ ma postać

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i^2 = 0, \text{ gdzie } \alpha_i = \alpha_{ii} \neq 0 \text{ dla } i = 1, \dots, k \text{ oraz pewnego } k = 0, 1, \dots, n.$$

Uwaga. Równania kanoniczne elipsy, hiperboli, elipsoidy, hiperboloidy 1-powłokowej, hiperboloidy 2-powłokowej, walca eliptycznego, walca hiperbolicznego i stożka mają postać kanoniczną pierwszego rodzaju.

Definicja.

Równanie $\sum\limits_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$ ma *postać kanoniczną drugiego rodzaju* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ ma postać

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i^2 + 2x_0 x_n = 0, \text{ gdzie } \alpha_i = \alpha_{ii} \neq 0 \text{ dla } i = 1, \dots, k \text{ oraz pewnego } k = 0, 1, \dots, n-1$$

(zamiast x_n może być dowolna inna zmienna niewystępująca w kwadracie).

Uwaga. Równania kanoniczne paraboli, walca parabolicznego, paraboloidy eliptycznej i paraboloidy hiperbolicznej mają postać kanoniczną drugiego rodzaju.

Definicja. $F : \sum\limits_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$ – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ w $\mathbb{C}^n$ (CP^n)

Zbiór F nazywa się *rzeczywisty* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ dla każdych $i, j = 0, 1, \dots, n$.

Twierdzenie. (**O redukcji**)

Dla każdego zbioru algebraicznego $F : \sum\limits_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$ w CP^n istnieje przekształcenie afiniczne f przekształcające zbiór F na zbiór określony przez równanie w postaci kanonicznej. Postać ta jest pierwszego rodzaju, jeżeli zbiór F ma co najmniej jeden środek właściwy, oraz drugiego rodzaju, jeżeli zbiór F nie ma środków właściwych. Jeżeli zbiór F jest rzeczywisty, to za f zawsze można wziąć pewną izometrię rzeczywistą.

(bez dowodu)

$F : \varphi(x) = 0$ – zbiór algebraiczny stopnia $\leqslant 2$ w CP^n (P^n)

Przyjmijmy

$$K(F) \underset{df}{=} r(\mathfrak{M}(\varphi)) \quad - \quad \text{liczba niezerowych wartości własnych macierzy } \mathfrak{M}(\varphi),$$

$$k(F) \underset{df}{=} r(\mathfrak{m}(\varphi)) \quad - \quad \text{liczba niezerowych wartości własnych macierzy } \mathfrak{m}(\varphi),$$

$$L(F) \underset{df}{=} \begin{array}{l}\text{wartość bezwzględna różnicy między liczbami dodatnich} \\ \text{i ujemnych wartości własnych macierzy } \mathfrak{M}(\varphi),\end{array}$$

$$l(F) \underset{df}{=} \begin{array}{l}\text{wartość bezwzględna różnicy między liczbami dodatnich} \\ \text{i ujemnych wartości własnych macierzy } \mathfrak{m}(\varphi)\end{array}$$

Twierdzenie.

1. Dwa zbiory algebraiczne F i F' stopnia $\leqslant 2$ w CP^n przystają rzutowo $\Leftrightarrow K(F) = K(F')$.

2. Dwa rzeczywiste zbiory algebraiczne F i F' stopnia $\leqslant 2$ w CP^n przystają rzutowo $\Leftrightarrow K(F) = K(F')$ i $L(F) = L(F')$.

(bez dowodu)

Wniosek. W CP^n istnieje dokładnie 1 klasa rzutowa zbiorów algebraicznych stopnia 2 bez punktów osobliwych.

Wniosek. W CP^n istnieje dokładnie n klas rzutowych wszystkich zbiorów algebraicznych stopnia 2.

Wniosek. W CP^n istnieje dokładnie $E\left(\frac{n+3}{2}\right)$ klas rzutowych rzeczywistych zbiorów algebraicznych stopnia 2 bez punktów osobliwych[1].

Wniosek. W CP^n istnieje dokładnie $\sum\limits_{k=1}^{n} E\left(\frac{k+3}{2}\right)$ klas rzutowych wszystkich rzeczywistych zbiorów algebraicznych stopnia 2.

Wnioski.

1. W CP^2 istnieją 2 klasy rzutowe rzeczywistych zbiorów algebraicznych stopnia 2 bez punktów osobliwych: stożkowe oraz zbiory algebraiczne bez punktów rzeczywistych; oraz 4 klasy rzutowe wszystkich rzeczywistych zbiorów algebraicznych stopnia 2: stożkowe, zbiory algebraiczne bez punktów rzeczywistych, pary prostych rzeczywistych oraz pary prostych urojonych mające tylko jeden wspólny punkt rzeczywisty.

[1] Dla $x \in \mathbb{R}$, symbol $E(x)$ oznacza liczbę całkowitą k taką, że $k \leqslant x < k + 1$.

2. W P^2 istnieje 1 klasa rzutowa rzeczywistych zbiorów algebraicznych stopnia 2 bez punktów osobliwych: stożkowe; oraz 2 klasy rzutowe wszystkich rzeczywistych zbiorów algebraicznych stopnia 2: stożkowe oraz pary prostych rzeczywistych.

3. W CP^3 istnieją 3 klasy rzutowe rzeczywistych zbiorów algebraicznych stopnia 2 bez punktów osobliwych: kwadryki prostokreślne, kwadryki nieprostokreślne oraz zbiory algebraiczne bez punktów rzeczywistych; oraz 7 klas rzutowych wszystkich rzeczywistych zbiorów algebraicznych stopnia 2.

4. W P^3 istnieją 2 klasy rzutowe rzeczywistych zbiorów algebraicznych stopnia 2 bez punktów osobliwych: kwadryki prostokreślne oraz kwadryki nieprostokreślne; oraz 5 klas rzutowych wszystkich rzeczywistych zbiorów algebraicznych stopnia 2: kwadryki prostokreślne, kwadryki nieprostokreślne, stożki, walce oraz pary płaszczyzn rzeczywistych.

Twierdzenie.

1. Dwa zbiory algebraiczne F i F' stopnia $\leqslant 2$ w CP^n przystają afinicznie $\Leftrightarrow K(F) = K(F')$ i $k(F) = k(F')$.

2. Dwa rzeczywiste zbiory algebraiczne F i F' stopnia $\leqslant 2$ w CP^n przystają afinicznie $\Leftrightarrow$ $K(F) = K(F')$, $L(F) = L(F')$, $k(F) = k(F')$ i $l(F) = l(F')$.

(bez dowodu)

Wniosek. W CP^n istnieją dokładnie 2 klasy afiniczne zbiorów algebraicznych stopnia 2 bez punktów osobliwych.

Wniosek. W CP^n istnieje dokładnie $3n-1$ klas afinicznych wszystkich zbiorów algebraicznych stopnia 2.

Wniosek. W CP^n istnieje dokładnie $n + E\left(\frac{n+1}{2}\right) + 1$ klas afinicznych rzeczywistych zbiorów algebraicznych stopnia 2 bez punktów osobliwych.

Wniosek. W CP^n istnieje dokładnie $n^2 + 3n - 1$ klas afinicznych wszystkich rzeczywistych zbiorów algebraicznych stopnia 2.

Klasyfikacja afiniczna rzeczywistych zbiorów algebraicznych stopnia $\leqslant 2$ w P^2:

Klasa afiniczna	Punkty niewłaściwe	Punkty osobliwe	Środki
Elipsa	0	0	1 właściwy
Hiperbola	2	0	1 właściwy
Parabola	1	0	1 niewłaściwy
Dwie proste właściwe przecinające się	2	1 właściwy	1 właściwy
Dwie proste właściwe równoległe	1	1 niewłaściwy	prosta właściwa
Prosta właściwa + niewłaściwa	prosta niewłaściwa	1 niewłaściwy	1 niewłaściwy
Prosta właściwa	1	prosta właściwa	prosta właściwa
Prosta niewłaściwa	prosta niewłaściwa	prosta niewłaściwa	prosta niewłaściwa

Uwaga. Widzimy, że w P^2 istnieją 3 klasy afiniczne zbiorów algebraicznych stopnia 2 bez punktów osobliwych. Wiemy, że w CP^2 istnieje $n + E\left(\frac{n+1}{2}\right) + 1 = 4$ takich klas: dodaktowo mamy urojony zbiór algebraiczny bez punktów osobliwych.

Uwaga. W P^2 istnieje 6 klas afinicznych wszystkich zbiorów algebraicznych stopnia 2. Wiemy, że w CP^2 istnieje $n^2 + 3n - 1 = 9$ takich klas: dodaktowo mamy urojony zbiór algebraiczny bez punktów osobliwych, parę prostych urojonych przecinających się w punkcie rzeczywistym właściwym oraz parę prostych urojonych równoległych.

Klasyfikacja afiniczna rzeczywistych zbiorów algebraicznych stopnia $\leqslant 2$ w P^3:

Klasa afiniczna	**Punkty niewł.**	**Punkty osobliwe**	**Środki**	**Uwagi**
Elipsoida	0	0	1 wł.	nieprostokreślna
Hiperboloida 1-powłokowa	stożkowa	0	1 wł.	prostokreślna
Hiperboloida 2-powłokowa	stożkowa	0	1 wł.	nieprostokreślna
Paraboloida eliptyczna	1	0	1 niewł.	nieprostokreślna
Paraboloida hiperboliczna	dwie proste	0	1 niewł.	prostokreślna
Stożek	stożkowa	1 wł.	1 wł.	prostokreślny
Walec eliptyczny	1	1 niewł.	prosta wł.	prostokreślny
Walec paraboliczny	jedna prosta	1 niewł.	prosta niewł.	prostokreślny
Walec hiperboliczny	dwie proste	1 niewł.	prosta wł.	prostokreślny
Dwie płaszczyzny wł. przecinające się	dwie proste	prosta wł.	prosta wł.	prostokreślny
Dwie płaszczyzny wł. równoległe	jedna prosta	prosta niewł.	płaszczyzna wł.	prostokreślny
Płaszczyzna wł. + niewł.	płaszczyzna niewł.	prosta niewł.	prosta niewł.	prostokreślny
Prosta wł.	1	prosta wł.	prosta wł.	prostokreślna
Prosta niewł.	prosta niewł.	prosta niewł.	prosta niewł.	prostokreślna
Płaszczyzna wł.	jedna prosta	płaszczyzna wł.	płaszczyzna wł.	prostokreślna
Płaszczyzna niewł.	płaszczyzna niewł.	płaszczyzna niewł.	płaszczyzna niewł.	prostokreślna

Uwaga. Widzimy, że w P^3 istnieje 5 klas afinicznych zbiorów algebraicznych stopnia 2 bez punktów osobliwych. Wiemy, że w CP^3 istnieje $n + E\left(\frac{n+1}{2}\right) + 1 = 6$ takich klas: dodaktowo mamy urojony zbiór algebraiczny bez punktów osobliwych.

Uwaga. W P^3 istnieje 14 klas afinicznych wszystkich zbiorów algebraicznych stopnia 2. Wiemy, że w CP^3 istnieje $n^2+3n-1 = 17$ takich klas: dodaktowo mamy urojony zbiór algebraiczny bez punktów osobliwych, parę płaszczyzn urojonych przecinających się wzdłuż prostej rzeczywistej właściwej oraz parę płaszczyzn urojonych równoległych.

Wniosek. (**Metoda znajdowania kierunków głównych, hiperpłaszczyzn symetrii oraz równania kanonicznego zbioru algebraicznego stopnia** 2)

$F : \varphi(x) = 0$ w P^2 lub P^3

1. Wyznaczamy wartości własne λ_i i wektory własne $\mathfrak{a}_i$ macierzy $\mathfrak{m}(\varphi)$.

2. Jeśli $\lambda_i = 0$, to $\mathfrak{a}_i$ jest kierunkiem wyjątkowym zbioru F; a jeśli $\lambda_i \neq 0$, to $\mathfrak{a}_i$ jest kierunkiem głównym niewyjątkowym zbioru F.

3. Hiperpłaszczyzna symetrii zbioru F = hiperpłaszczyzna średnicowa główna (sprzężona z kierunkiem głównym niewyjątkowym). Przecięcie hiperpłaszczyzny symetrii zbioru F ze zbiorem F jest równe zbiorowi wierzchołków zbioru F (jeśli F ma wierzchołki).

4. Biorąc środek właściwy (lub wierzchołek) zbioru F oraz kierunki główne zbioru F (jeśli trzeba możemy dobrać trzeci kierunek prostopadły do dwóch pierwszych) konstruujemy odpowiednią izometrię. Po wstawieniu do równania zbioru F otrzymujemy równanie kanoniczne zbioru F.

Przykład 1. Sklasyfikować afinicznie zbiór algebraiczny $F : 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_2 - 1 = 0$ w $\mathbb{R}^2$.

Rozwiązanie. Wyznaczamy punkty niewłaściwe i punkty osobliwe zbioru F i udzielamy odpowiedzi. Najpierw uzupełniamy zbiór F:

$$F^* : \varphi(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_0x_2 - x_0^2 = 0 \quad \text{w} \quad P^2.$$

Punkty niewłaściwe:

Musimy rozwiązać układ (bo punkty niewłaściwe mają współrzędną $x_0 = 0$):

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 0 \end{cases},$$

czyli

$$\begin{aligned}
&(4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1^2 = 0 \\
&(2x_1 - x_2)^2 - 2x_1^2 = 0 \\
&\left(2x_1 - x_2 - \sqrt{2}x_1\right)\left(2x_1 - x_2 + \sqrt{2}x_1\right) = 0 \\
&x_2 = \left(2 - \sqrt{2}\right) x_1 \ \vee \ x_2 = \left(2 + \sqrt{2}\right) x_1.
\end{aligned}$$

Stąd zbiór F^* ma dwa punkty niewłaściwe: $\left\{0, x_1, \left(2 - \sqrt{2}\right) x_1\right\} = \left\{0, 1, 2 - \sqrt{2}\right\}$ i $\left\{0, x_1, \left(2 + \sqrt{2}\right) x_1\right\} = \left\{0, 1, 2 + \sqrt{2}\right\}$.

Punkty osobliwe:

$$\mathfrak{M}(\varphi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \Delta(\varphi) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 4 = 0.$$

Wiemy, że F^* ma co najmniej jeden punkt osobliwy $\Leftrightarrow \Delta(\varphi) = 0$. Stąd F^* ma punkty osobliwe.

Wiemy, że punkt a jest osobliwy $\Leftrightarrow \varphi_i(a) = 0$ dla $i = 0, 1, 2$. Mamy:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= -x_0 + x_2\\ \varphi_1(x) &= 2x_1 - 2x_2\\ \varphi_2(x) &= x_0 - 2x_1 + x_2\end{aligned}$$

(współrzędne są elementami wierszy macierzy $\mathfrak{M}(\varphi)$)
oraz

$$\begin{cases} -x_0 + x_2 = 0\\ 2x_1 - 2x_2 = 0\\ x_0 - 2x_1 + x_2 = 0\end{cases},$$

skąd

$$\begin{cases} x_0 = x_2\\ x_1 = x_2\end{cases}.$$

Zbiór F^* ma jeden punkt osobliwy: $\{x_2, x_2, x_2\} = \{1, 1, 1\}$.

Zatem F jest parą prostych właściwych przecinających się. $\square$

Przykład 2. Sklasyfikować afinicznie zbiór algebraiczny $F : 4x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 16x_1 + 15 = 0$ w $\mathbb{R}^3$.

Rozwiązanie. Uzupełniamy zbiór F:

$$F^* : \varphi(x) = 4x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 16x_0x_1 + 15x_0^2 = 0 \ \text{ w } \ P^3.$$

Punkty niewłaściwe:

$$\begin{cases} x_0 = 0\\ 4x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 = 0\end{cases}.$$

Jest to równanie pewnej stożkowej w płaszczyźnie niewłaściwej.

Punkty osobliwe:

$$\mathfrak{M}(\varphi) = \begin{bmatrix} 15 & -8 & 0 & 0\\ -8 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \Delta(\varphi) = \begin{vmatrix} 15 & -8 & 0 & 0\\ -8 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

Stąd F^* nie ma punktów osobliwych. Zatem F jest hiperboloidą (nie wiemy którą, musielibyśmy zbadać jej prostokreślność lub wyznaczyć jej równanie kanoniczne, zob. Przykład 4). $\square$

Przykład 3. Sklasyfikować afinicznie zbiór algebraiczny $F: x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_3-2x_1+4x_2+4=0$ w $\mathbb{R}^3$.

Rozwiązanie. Uzupełniamy zbiór F:

$$F^*: \varphi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_0x_1 + 4x_0x_2 + 4x_0^2 = 0 \ \text{ w } \ P^3.$$

Punkty niewłaściwe:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 = 0 \end{cases},$$

czyli

$$\begin{aligned} &x_2^2 + (x_1 + x_3)^2 = 0 \\ &x_2 = 0 \ \wedge \ x_1 + x_3 = 0 \\ &x_2 = 0 \ \wedge \ x_3 = -x_1. \end{aligned}$$

Stąd zbiór F^* ma jeden punkt niewłaściwy: $\{0, x_1, 0, -x_1\} = \{0, 1, 0, -1\}$.

Punkty osobliwe:

$$\mathfrak{M}(\varphi) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \Delta(\varphi) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Stąd F^* nie ma punktów osobliwych. Zatem F jest paraboloidą eliptyczną. □

Przykład 4. Znaleźć środek oraz kierunki główne zbioru algebraicznego $F: 4x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 16x_1 + 15 = 0$ w $\mathbb{R}^3$. Sprowadzić równanie zbioru F do postaci kanonicznej.

Rozwiązanie. Widzimy, że F jest hiperboloidą z Przykładu 2. Mamy:

$$F^*: \varphi(x) = 4x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 16x_0x_1 + 15x_0^2 = 0 \ \text{ w } \ P^3,$$

$$\mathfrak{M}(\varphi) = \begin{bmatrix} 15 & -8 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{m}(\varphi) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Środek:

Wiemy, że F ma dokładnie jeden środek właściwy $\Leftrightarrow \delta(\varphi) \neq 0$; oraz że F ma co najmniej jeden kierunek wyjątkowy (czyli środek niewłaściwy) $\Leftrightarrow \delta(\varphi) = 0$. Mamy

$$\delta(\varphi) = \det(\mathfrak{m}(\varphi)) = 8 \neq 0.$$

Stąd zbiór F ma dokładnie jeden środek właściwy. Wiemy, że punkt a jest środkiem $\Leftrightarrow \varphi_i(a) = 0$ dla $i = 1, 2, 3$. Mamy:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= -8x_0 + 4x_1 \\
\varphi_2(x) &= -x_2 \\
\varphi_3(x) &= -2x_3
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{cases} -8x_0 + 4x_1 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases},$$

skąd

$$\begin{cases} x_1 = 2x_0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Zatem punkt $\{x_0, 2x_0, 0, 0\} = \{1, 2, 0, 0\}$ jest środkiem właściwym zbioru F mającym współrzędne kartezjańskie: $(2, 0, 0)$.

Kierunki główne:

Wiemy, że wektory własne macierzy $\mathfrak{m}(\varphi)$ są kierunkami głównymi zbioru F. Mamy wartości własne macierzy $\mathfrak{m}(\varphi)$: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$ i $\lambda_3 = -2$ oraz, odpowiednio, wektory własne macierzy $\mathfrak{m}(\varphi)$: $\{0, x_1, 0, 0\} = \{0, 1, 0, 0\}$, $\{0, 0, x_2, 0\} = \{0, 0, 1, 0\}$ i $\{0, 0, 0, x_3\} = \{0, 0, 0, 1\}$. Stąd są one kierunkami głównymi niewyjątkowymi.

Równanie kanoniczne zbioru F:

Mamy środek $a = (2, 0, 0)$ i kierunki główne $\mathfrak{a}_1 = [1, 0, 0]$, $\mathfrak{a}_2 = [0, 1, 0]$ i $\mathfrak{a}_3 = [0, 0, 1]$. Do wyznaczenia równania kanonicznego zbioru F musimy znaleźć izometrię. Potrzebujemy środka lub wierzchołka zbioru F oraz trzech prostopadłych wersorów. W naszym przykładzie mamy środek i trzy prostopadłe wersory, więc izometria ma postać:

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3) &= a + \mathfrak{a}_1\overline{x}_1 + \mathfrak{a}_2\overline{x}_2 + \mathfrak{a}_3\overline{x}_3 \\
&= (2, 0, 0) + [1, 0, 0]\overline{x}_1 + [0, 1, 0]\overline{x}_2 + [0, 0, 1]\overline{x}_3,
\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{cases} x_1 = 2 + \overline{x}_1 \\ x_2 = \overline{x}_2 \\ x_3 = \overline{x}_3 \end{cases}.$$

Wstawiając powyższe do równania zbioru F otrzymujemy następujące równanie kanoniczne zbioru F:

$$\frac{\overline{x}_2^2}{1} + \frac{\overline{x}_3^2}{\frac{1}{2}} - \frac{\overline{x}_1^2}{\frac{1}{4}} = -1.$$

Zatem F jest hiperboloidą 2-powłokową. $\square$

Przykład 5. Znaleźć środek oraz kierunki główne zbioru algebraicznego $F : x_3^2 - 3x_1 - 4x_2 - 5 = 0$ w $\mathbb{R}^3$. Sprowadzić równanie zbioru F do postaci kanonicznej.

Rozwiązanie. Uzupełniamy zbiór F:

$$F^* : \varphi(x) = x_3^2 - 3x_0x_1 - 4x_0x_2 - 5x_0^2 = 0 \quad \text{w} \quad P^3.$$

Stąd

$$\varphi(x) = 2x_3^2 - 6x_0x_1 - 8x_0x_2 - 10x_0^2 = 0,$$

$$\mathfrak{M}(\varphi) = \begin{bmatrix} -10 & -3 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{m}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Środek:

$$\delta(\varphi) = \det(\mathfrak{m}(\varphi)) = 0.$$

Stąd zbiór F ma kierunki wyjątkowe, czyli środki niewłaściwe:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -3x_0 \\ \varphi_2(x) &= -4x_0 \\ \varphi_3(x) &= 2x_3 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{cases} -3x_0 = 0 \\ -4x_0 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases},$$

skąd

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Jest to prosta niewłaściwa zawierająca wszystkie środki niewłaściwe zbioru F. Ponadto zbiór F nie ma środka właściwego, więc może mieć wierzchołek.

Kierunki główne:

Wartości własne macierzy $\mathfrak{m}(\varphi)$: $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$. Dla $\lambda_1 = 0$ mamy już wyznaczone kierunki (główne) wyjątkowe (środki niewłaściwe) zbioru F. Dla $\lambda_2 = 2$ mamy kierunek główny niewyjątkowy: $\{0, 0, 0, x_3\} = \{0, 0, 0, 1\}$.

Wierzchołek:

Wierzchołek jest przecięciem zbioru F i hiperpłaszczyzny średnicowej głównej, czyli hiperpłaszczyzny średnicowej sprzężonej z kierunkiem głównym niewyjątkowym $a = \{0, 0, 0, 1\}$. Mamy

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= -10x_0 - 3x_1 - 4x_2 \\ \varphi_1(x) &= -3x_0 \\ \varphi_2(x) &= -4x_0 \\ \varphi_3(x) &= 2x_3 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \varphi_0(a) &= 0 \\ \varphi_1(a) &= 0 \\ \varphi_2(a) &= 0 \\ \varphi_3(a) &= 2 \end{aligned}.$$

Ponieważ biegunowa punktu a względem zbioru F ma równanie

$$B(a) : \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(a) \cdot x_i = 0,$$

więc dostajemy

$$B(a) : 2x_3 = 0,$$

czyli

$$B(a): x_3 = 0.$$

Jest to płaszczyzna średnicowa główna zbioru F, czyli płaszczyzna symetrii zbioru F. Przecięcie zbioru F i $B(a)$:

$$\begin{cases} x_3^2 - 3x_1 - 4x_2 - 5 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

czyli

$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 5 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Jest to prosta zawierająca wszystkie wierzchołki zbioru F. Wybieramy jeden, na przykład, $b = (1, -2, 0)$.

Równanie kanoniczne zbioru F:

Do wyznaczenia równania kanonicznego zbioru F potrzebujemy jeszcze trzech prostopadłych wersorów związanych z F. Mamy jeden:

$$\mathfrak{a}_1 = [0, 0, 1].$$

Jako drugi bierzemy kierunek osobliwy zbioru F. Musimy rozwiązać układ:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = -10x_0 - 3x_1 - 4x_2 = 0 \\ \varphi_1(x) = -3x_0 = 0 \\ \varphi_2(x) = -4x_0 = 0 \\ \varphi_3(x) = 2x_3 = 0 \end{cases},$$

czyli

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = -\frac{4}{3}x_2 \end{cases}.$$

Stąd $\left\{0, -\frac{4}{3}x_2, x_2, 0\right\} = \{0, -4, 3, 0\}$ jest kierunkiem osobliwym zbioru F. Stąd mamy drugi wektor $[-4, 3, 0]$ oraz drugi wersor:

$$\mathfrak{a}_2 = \frac{[-4, 3, 0]}{|[-4, 3, 0]|} = \left[-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right].$$

Jako trzeci wersor bierzemy:

$$\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{vmatrix} = \left[-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right] \parallel \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right] = \mathfrak{a}_3.$$

Stąd izometria ma postać:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= b + \mathfrak{a}_1\overline{x}_1 + \mathfrak{a}_2\overline{x}_2 + \mathfrak{a}_3\overline{x}_3 \\ &= (1, -2, 0) + [0, 0, 1]\overline{x}_1 + \left[-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right]\overline{x}_2 + \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right]\overline{x}_3,\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{4}{5}\overline{x}_2 + \frac{3}{5}\overline{x}_3 \\ x_2 = -2 + \frac{3}{5}\overline{x}_2 + \frac{4}{5}\overline{x}_3 \\ x_3 = \overline{x}_1 \end{cases}.$$

Wstawiając powyższe do równania zbioru F otrzymujemy następujące równanie kanoniczne zbioru F:

$$\overline{x}_1^2 - 5\overline{x}_3 = 0.$$

Zatem F jest walcem parabolicznym. $\square$

Bibliografia

[1] G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej*, WNT, Warszawa 2002.

[2] K. Borsuk, *Geometria analityczna wielowymiarowa*, PWN, Warszawa 1976.

[3] B. Gleichgewicht, *Algebra*, Oficyna Wydawnicza GIS, Warszawa 2004.

[4] M. Moszyńska, J. Święcicka, *Geometria z algebrą liniową*, PWN, Warszawa 1987.

[5] M. Stark, *Geometria analityczna ze wstępem do geometrii wielowymiarowej*, PWN, Warszawa 1974.